EKSAMEN I MA2501 NUMERISKE METODER

Løsningsforslag

Oppgave 1 $S(x)$ er en natrulig kubisk spline dersom $S(x)$, $S'(x)$ og $S''(x)$ alle er kontinuerlige på intervallet $(-2, 2)$, og $S''(-2) = S''(2) = 0$. Skriver vi

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) & -2 \le x \le -1 \\ S_1(x) & -1 \le x \le 1 \\ S_2(x) & 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

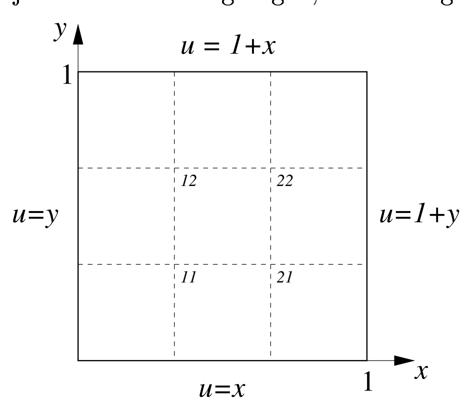
ser vi at

$$\begin{array}{rlrll} S_0(-1) = 4, & S_1(-1) = 4, & S_1(1) = 4, & S_2(1) = 4, & S(x) \text{ er kontinuerlig.} \\ S_0'(-1) = -2, & S_1'(-1) = -2, & S_1'(1) = -2 & S_2'(1) = -2, & S'(x) \text{ er kontinuerlig.} \\ S_0''(-1) = 6, & S_1'(-1) = -6, & S_1'(1) = -6 & S_2'(1) = -6, & S''(x) \text{ er kontinuerlig.} \\ S_0''(-2) = 0, & S_2''(2) = 0, & & & \end{array}$$

Dvs. $S(x)$ er en naturlig kubisk spline.

Oppgave 2

a) Lag først en figur av definisjonsområdet for ligningen, randbetingelsene og diskretiseringen:



Laplace-ligningen beregnet i et punkt (x, y) kan tilnærmes ved bruk av fempunktsformelen, dvs.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \frac{u(x+h,y) + u(x-h,y) + u(x,y+h) + u(x,y-h) - 4u(x,y)}{h^2}$$

Setter vi denne approksimasjonen inn i ligningen, og lar $u_{i,j} \approx u(x_i, y_j)$, $h = 1/3$ får vi for hvert av de indre punkene

$$\begin{aligned}
u_{2,1} + u_{0,1} + u_{1,2} + u_{1,0} - 4u_{1,1} &= 0 \\
u_{3,1} + u_{1,1} + u_{2,2} + u_{2,0} - 4u_{2,1} &= 0 \\
u_{2,2} + u_{0,2} + u_{1,1} + u_{1,3} - 4u_{2,1} &= 0 \\
u_{3,2} + u_{1,2} + u_{2,1} + u_{2,3} - 4u_{2,2} &= 0.
\end{aligned}$$

Ved å sette inn randverdiene $u_{1,0} = u_{0,1} = 1/3$, $u_{2,0} = u_{0,2} = 2/3$, $u_{3,1} = u_{1,3} = 4/3$, $u_{3,2} = u_{2,3} = 5/3$ får vi det gitte ligningssystemet.

b) En iterasjon av Gauss-Seidels metode med de gitte startbetingelsene gir

$$\begin{aligned}
u_{1,1}^{(1)} &= \frac{1}{4}(\frac{2}{3} + u_{2,1}^{(0)} + u_{1,2}^{(0)}) = 0.666667 \\
u_{2,1}^{(1)} &= \frac{1}{4}(2 + u_{1,1}^{(1)} + u_{2,2}^{(0)}) = 0.991667 \\
u_{1,2}^{(1)} &= \frac{1}{4}(2 + u_{1,1}^{(1)} + u_{2,2}^{(0)}) = 0.991667 \\
u_{2,2}^{(1)} &= \frac{1}{4}(\frac{10}{3} + u_{2,1}^{(1)} + u_{1,2}^{(1)}) = 1.310417
\end{aligned}$$

Og joda, Gauss-Seidel iterasjonene vil konvergere siden koeffisientmatrisa er diagonaldominant ($a_{i,i} = 4$, og $\sum_{j=1, j\neq i} |a_{i,j}| = 2$).

Oppgave 3 Vi kan for eksempel bruke polynominterpolasjon. I så fall kan vi tilnærme funksjonen $D(T)$ med polynomet

$$\begin{aligned}
D(T) \approx p_3(T) = 12.8\frac{(T-10)(T-15)(T-20)}{(5-10)(5-15)(5-20)} + 11.33\frac{(T-5)(T-15)(T-20)}{(10-5)(10-15)(10-20)} \\
+ 10.15\frac{(T-5)(T-10)(T-20)}{(15-5)(15-10)(15-20)} + 9.17\frac{(T-5)(T-10)(T-15)}{(20-5)(20-10)(20-15)}
\end{aligned}$$

og

$$D(13) \approx p_3(13) = -12.8\frac{42}{750} + 11.33\frac{112}{250} + 10.15\frac{168}{250} - 9.17\frac{48}{750} = 10.59.$$

Så $D(13°\mathrm{C}) \approx 10.59\,\mathrm{mg/l}$.

Det ville også vært mulig å bruke splines.

Oppgave 4

a) Trapesmetoden med $h = 0.2$ gir:

$$\begin{aligned} T(0.2) &= 0.2\left(\frac{1}{2}\sin^2(2.0) + \sin^2(2.2) + \sin^2(2.4) + \sin^2(2.6) + \sin^2(2.8) + \frac{1}{2}\sin^2(2.0)\right) \\ &= 0.382249. \end{aligned}$$

Feilen i ligningen er gitt ved

$$\int_a^b f(x)dx - T(h) = -\frac{1}{12}(b-a)h^2 f''(\xi), \qquad \xi \in (a,b)$$

I vårt tilfelle er

$$f(x) = \sin^2(x), \qquad f'(x) = 2\sin(x)\cos(x) \qquad \text{og} \qquad f''(x) = 2(\cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos(2x).$$

Så $f''(x)$ har et minimum i $x = \pi/2 = 1.57$, et maksimum i $x = \pi$ og er monotont økende i mellom, altså må

$$|f''(\xi)| \leq \max\{|f''(2)|, |f''(3)|\} = 1.92034 \quad \text{for} \quad \xi \in (2,3)$$

og

$$\left|\int_2^3 \sin^2(x)dx - T(0.2)\right| \leq \frac{1}{12} \cdot 0.2^2 \cdot 1.92034 = 6.40 \cdot 10^{-3}.$$

b) La for enkelthets skyld $\bar{x}_i = x_i + h/2$ være midtpunktet mellom x_i og x_{i+1}. Da kan feilen skrives som

$$E_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} (f(x) - f(\bar{x}_i))dx = \int_{-h/2}^{h/2} (f(\bar{x}_i + t) - f(\bar{x}_i))dt$$

La nå $f(\bar{x}_i + t) = f(\bar{x}_i) + tf'(\bar{x}_i) + \frac{1}{2}t^2 f''(\nu(t))$. Siden feilutrykket som skal vises inneholder f'' er det rimelig å anta at vi trenger akkurat så mange ledd. Nå kan vi sette dette inn i utrykket for feilen E_i:

$$\begin{aligned} E_i &= \int_{-h/2}^{h/2} (f(\bar{x}_i) + tf'(\bar{x}_i) + \frac{1}{2}t^2 f''(\nu(t)) - f(\bar{x}_i)dt \\ &= \int_{-h/2}^{h/2} f'(\bar{x}_i)tdt + \int_{-h/2}^{h/2} \frac{1}{2} f''(\nu(t))t^2 dt \\ &= 0 + f''(\xi_i)\int_{-h/2}^{h/2} t^2 dt \\ &= \frac{h^3}{24} f''(\xi_i), \qquad \xi_i \in (x_i, x_{i+1}). \end{aligned}$$

For det siste integralet har vi brukt middelverdisetningen for integraler, hvilket er mulig fordi t^2 er en ikke-negativ funksjon.

Feilen for den sammensatte midtpunktformelen blir

$$E = \sum_{i=0}^{n-1} E_i = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h^3}{24} f''(\xi_i) = \frac{b-a}{24} h^2 \left[\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f''(\xi_i)\right] = \frac{b-a}{24} h^2 f''(\zeta)$$

Oppgave 5 Scriptet løser det ikke-lineære ligningssystemet

$$x_1^2 + x_2^2 - 25 = 0$$
$$x_1^2 - x_2 - 2 = 0$$

med Newtons metode og med startverdiene $x_1^{(0)} = 5.0$ og $x_2^{(0)} = 2.0$.

Første iterasjon er gitt ved

$$J(\vec{x}^{(0)})\vec{h} = -\vec{f}(x^{(0)}), \qquad \vec{x}^{(1)} = \vec{x}^{(0)} + \vec{h} \tag{1}$$

der

$$J(x^{(0)}) = \begin{bmatrix} 2x_1^{(0)} & 2x_2^{(0)} \\ 2x_1^{(0)} & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 4 \\ 10 & -1 \end{bmatrix}$$

og

$$\vec{f}(\vec{x}^{(0)}) = \begin{bmatrix} (x_1^{(0)})^2 + (x_2^{(0)})^2 - 25 \\ (x_1^{(0)})^2 - x_2^{(0)} - 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 21 \end{bmatrix}$$

Så løsningen av (1) er

$$\vec{h} = \begin{bmatrix} -1.76 \\ 3.4 \end{bmatrix}, \qquad \vec{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 3.24 \\ 5.4 \end{bmatrix}$$

så vi bør få en utskrift av typen

```
i =  1,  x1 = 3.24000000,  x2 = 5.40000000
```