Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Elena Celledoni (48238584)

EKSAMEN I NUMERISKE METODER (MA2501)

Onsdag 6. juni 2007
4 timer Sensur onsdag 27. juni 2007

Hjelpemidler:

- W. Cheney & D. Kincaid, *Numerical Mathematics and Computing*, 4. eller 5. utgave.
- Notat om løsning av ordinære differensjalligninger
- Notat om fikspunkt iterasjon
- Godkjent lommeregner.

Generelt:

- Alle deloppgaver teller likt ved karaktersetting.
- Alle svar skal begrunnes.
- Besvarelsen skal inneholde så mange mellomregninger at det tydelig fremkommer hvilke metoder og mellomresultater som benyttes.

Oppgave 1 Finn polynomet av lavest mulig grad som interpolerer følgende datasett

x	0	1	2	3
y	1	2	1	0

Bruk Newtons form for interpolasjonspolynom og Newtons dividerte differanse til formålet.

Oppgave 2 Betrakt følgende system av ikke-lineære ligninger

$$\begin{aligned} \cos(x) + e^{-y} - 2 &= 0 \\ x + (y+3)^2 - 4 &= 0 \end{aligned}.$$

Utfør en iterasjon med Newtons metode, bruk startverdier $x_0 = 0$ og $y_0 = 0.5$.

Oppgave 3 Finn den naturlige kubiske splinen som interpolerer datasett

t	t_0	t_1
y	y_0	y_1

Gi en formel for splinen. Her er t_0 og t_1 nodene.

Oppgave 4 Betrakt den partielle differensialligningen

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in [0,1], \quad t \geq 0,$$
$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad t \geq 0$$
$$u(x,0) = \cos(\pi x), \quad x \in [0,1],$$

Del intervallet $[0,1]$ (x-retning) i n like store intervaller ved å bruke nodene $x_i = ih$, $i = 0, \ldots, n$ og $h = 1/n$. Anta k er skrittlengde for diskretisering i t retning. Vi bruker notasjonen U_i^j for den numeriske tilnærmelsen av $u(x_i, t_j)$ der $t_j = kj$.

a) Crank Nicholsons diskretiseringsmetode kan formuleres på følgende måte,

$$\frac{U_i^{j+1} - U_i^j}{h} = \frac{1}{2}\left(\frac{U_{i+1}^{j+1} - 2U_i^{j+1} + U_{i-1}^{j+1}}{k^2} + \frac{U_{i+1}^j - 2U_i^j + U_{i-1}^j}{k^2}\right)$$

der $i = 1, \ldots, n-1$ og $j = 1, 2, \ldots$.

Vis at ved bruk av Crank-Nicholsons diskretiseringsmetode for den oppgitte ligningen, med $n = 3$ og $k = h^2$, får man følgende ligningssystem å løse,

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1^1 \\ U_2^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix},$$

der b_1 og b_2 kan beregnes ved bruk av initial funksjon $u(x,0) = \cos(\pi x)$. Finn b_1, b_2 og U_1^1, U_2^1.

b) Betrakt Gauss-Seidel iterasjonsmetode for å finne numeriske tilnærmelser til løsningen av systemet gitt i forrige punktet. Bevis at Gauss-Seidel konvergerer på dette systemet for alle startverdier.

Oppgave 5 Vi skal se på numerisk løsning av initialverdiproblemet,

$$\dot{y} = f(x, y), \quad y(0) = y_0.$$

Betrakt den numeriske integrasjonsmetoden

$$y_{n+1} = y_n + \alpha h f(x_n, y_n) + \beta h f(x_n + \gamma h, y_n + \gamma h f(x_n, y_n)),$$

der $h > 0$ er skrittlengde, og α, β, og γ er reelle parametre.

a) Vis at metoden er konsistent hvis $\alpha + \beta = 1$. Vis at betingelsene

$$\alpha + \beta = 1, \quad \beta\gamma = \frac{1}{2},$$

garanterer at metoden har orden minst 2.

Hint. Sammenlign Taylorutviklingen av $y(h)$ med Taylorutviklingen av den numeriske tilnærmelsen y_1.

b) Anta at en metode av orden 2 av forrige type brukes for å løse $\dot{y} = -\lambda y, \quad y(0) = 1$, der λ er reell og positiv. Vis at følgen $\{y_n\}_{n\geq 0}$ er begrenset hvis og bare hvis $h \leq 2/\lambda$ og at for slike verdier av λ får man

$$|y(x_n) - y_n| \leq \frac{1}{6}\lambda^3 h^2 x_n. \tag{1}$$

Hint For å bevise (1) kan man først bruke Taylorsteorem og finne en øvreskranke for $|y(h) - y_1|$. Deretter kan man bruke formelen

$$a^n - b^n = \sum_{k=0}^{n-1} a^k (a - b) b^{n-k-1},$$

for å fullføre beviset.