Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Elena Celledoni (48238584)

EKSAMEN I NUMERISKE METODER (MA2501)

Onsdag 6. juni 2007
4 timer Sensur onsdag 27. juni 2007

Hjelpemidler:

- W. Cheney & D. Kincaid, *Numerical Mathematics and Computing*, 4. eller 5. utgave.
- Notat om løsning av ordinære differensjalligninger
- Notat om fikspunkt iterasjon
- Godkjent lommeregner.

Generelt:

- Alle deloppgaver teller likt ved karaktersetting.
- Alle svar skal begrunnes.
- Besvarelsen skal inneholde så mange mellomregninger at det tydelig fremkommer hvilke metoder og mellomresultater som benyttes.

Oppgave 1 Finn polynomet av lavest mulig grad som interpolerer følgende datasett

x	0	1	2	3
y	1	2	1	0

Bruk Newtons form for interpolasjonspolynom og Newtons dividerte differanse til formålet.

Fasit Dividerte differanse tabell er

x	$f(x)$	$f[x_0,x_1]$	$f[x_0,x_1,x_2]$	$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$
0	1			
		1		
1	2		-1	
		-1		$\frac{1}{3}$
2	1		0	
		-1		
3	0			

og interpolasjonspolynomet blir $p(x) = 1 + \frac{8}{3}x - 2x^2 + \frac{1}{3}x^3$.

Oppgave 2 Betrakt følgende system av ikke-lineære ligninger

$$\begin{aligned} \cos(x) + e^{-y} - 2 &= 0 \\ x + (y+3)^2 - 4 &= 0 \end{aligned}.$$

Utfør en iterasjon med Newtons metode, bruk startverdier $x_0 = 0$ og $y_0 = 0.5$.

Fasit Newton iterasjonen er

$$\begin{bmatrix} x^{n+1} \\ y^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^n \\ y^n \end{bmatrix} - J(x^n, y^n)^{-1} \begin{bmatrix} F_1(x^n, y^n) \\ F_2(x^n, y^n) \end{bmatrix}$$

der $F_1(x,y) = \cos(x) + e^{-y} - 2$ og $F_2(x,y) = x + (y+3)^2 - 4$ og $J(x,y)$ er Jacobi matrisa av $F(x,y)$ med

$$F(x,y) := \begin{bmatrix} F_1(x,y) \\ F_2(x,y) \end{bmatrix}.$$

Man får

$$J(x,y) = \begin{bmatrix} -\sin(x) & -e^{-y} \\ 1 & 2(y+3) \end{bmatrix},$$

og ved å sette inn startverdier i iterasjonsformelen får man $x^1 = -3.7090$ og $y^1 = -0.1487$.

Oppgave 3 Finn den naturlige kubiske splinen som interpolerer datasett

t	t_0	t_1
y	y_0	y_1

Gi en formel for splinen. Her er t_0 og t_1 nodene.

Fasit Den naturlige kubiske splinen med noder t_0, t_1 er et polynom $s(x)$ av grad 3 slik at $s''(t_0) = s''(t_1) = 0$. Merk her har vi bare et intervall $[t_0, t_1]$.

Man setter $s(x) = ax^3 + bx + c + d$ og ved å derivere to ganger og bruke betingelsen $s''(t_0) = s''(t_1) = 0$ får man at $a = b = 0$. Derfor er $s(x) = cx + d$ en linje som interpolerer datasettet, dvs (ved bruk av Lagrange form for interpolasjonspolynom),

$$s(x) = y_0 \frac{x - t_1}{t_0 - t_1} + y_1 \frac{x - t_0}{t_1 - t_0}, \quad x \in [t_0, t_1].$$

Oppgave 4 Betrakt den partielle differensialligningen

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial u}{\partial t} = \tfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, &\quad x \in [0,1], \quad t \geq 0, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, &\quad t \geq 0 \\ u(x,0) = \cos(\pi x), &\quad x \in [0,1], \end{aligned}$$

Del intervallet $[0, 1]$ (x-retning) i n like store intervaller ved å bruke nodene $x_i = ih$, $i = 0, \ldots, n$ og $h = 1/n$. Anta k er skrittlengde for diskretisering i t retning. Vi bruker notasjonen U_i^j for den numeriske tilnærmelsen av $u(x_i, t_j)$ der $t_j = kj$.

a) Crank Nicholsons diskretiseringsmetode kan formuleres på følgende måte,

$$\frac{U_i^{j+1} - U_i^j}{k} = \frac{1}{2} \left(\frac{U_{i+1}^{j+1} - 2U_i^{j+1} + U_{i-1}^{j+1}}{h^2} + \frac{U_{i+1}^j - 2U_i^j + U_{i-1}^j}{h^2} \right)$$

der $i = 1, \ldots, n-1$ og $j = 1, 2, \ldots$.

Vis at ved bruk av Crank-Nicholsons diskretiseringsmetode for den oppgitte ligningen, med $n = 3$ og $k = h^2$, får man følgende ligningssystem å løse,

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1^1 \\ U_2^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix},$$

der b_1 og b_2 kan beregnes ved bruk av initial funksjon $u(x, 0) = \cos(\pi x)$. Finn b_1, b_2 og U_1^1, U_2^1.

Fasit Ved å bruke formlene til Crank-Nicholsons metoden finner man

$$\begin{aligned} -U_0^1 + 4U_1^1 - U_2^1 &= U_2^0 + U_0^0 \\ -U_1^1 + 4U_2^1 - U_3^1 &= U_3^0 + U_1^0. \end{aligned}$$

Man har $U_0^1 = U_3^1 = 0$ av randbetingelser. Ved å sette $U_0^0 = 0$ og $U_3^0 = 0$ får man $b_1 = U_2^0 = \cos(2\pi/3) = -0.5$ og $b_2 = U_1^0 = \cos(\pi/3) = 0.5$ og ved å løse systemet $U_1^1 = -0.1$ og $U_2^1 = 0.1$. Ved å sette $U_0^0 = 1$ og $U_3^0 = -1$ får man $b_1 = U_2^0 = 1 + \cos(2\pi/3) = 0.5$ og $b_2 = U_1^0 = -1 + \cos(\pi/3) = -0.5$ og ved å løse systemet $U_1^1 = 0.1$ og $U_2^1 = -0.1$. Begge svar er godkjent siden i oppgaveteksten er randbetingelser og initialbetingelser inkonsistente.

b) Betrakt Gauss-Seidel iterasjonsmetode for å finne numeriske tilnærmelser til løsningen av systemet gitt i forrige punktet. Bevis at Gauss-Seidel konvergerer på dette systemet for alle startverdier.

Fasit Ved bruk av Gauss-Seidel på $AX = \mathbf{b}$ med $\mathbf{b} = [b_1, b_2]^T$ og matrisen A fra det forrige punktet, har vi

$$X^{n+1} = M^{-1}NX^n + M^{-1}\mathbf{b},$$

der

$$A = M - N = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Konvergensen er garantert for alle X^0 når det finnes en matrise-norm $\|\cdot\|$ slik at $\|M^{-1}N\| \leq 1$. Vi har

$$M^{-1}N = \begin{bmatrix} 0 & 1/4 \\ 0 & 1/16 \end{bmatrix}$$

og $\|M^{-1}N\|_\infty = 1/4 < 1$. Derfor er $X^n \to U^1$ for $n \to \infty$ og $U^1 = [U_1^1, U_2^1]^T$.

Oppgave 5 Vi skal se på numerisk løsning av initialverdiproblemet,

$$\dot{y} = f(x, y), \quad y(0) = y_0.$$

Betrakt den numeriske integrasjonsmetoden

$$y_{n+1} = y_n + \alpha h f(x_n, y_n) + \beta h f(x_n + \gamma h, y_n + \gamma h f(x_n, y_n)),$$

der $h > 0$ er skrittlengde, og α, β, og γ er reelle parametre.

a) Vis at metoden er konsistent hvis $\alpha + \beta = 1$. Vis at betingelsene

$$\alpha + \beta = 1, \quad \beta\gamma = \frac{1}{2},$$

garanterer at metoden har orden minst 2.

Hint. Sammenlign Taylorutviklingen av $y(h)$ med Taylorutviklingen av den numeriske tilnærmelsen y_1.

Fasit Ved bruk av Taylorutvikling,

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + hf + \frac{h^2}{2}(f_x + f_y f) + \mathcal{O}(h^3),$$

og ved å definere

$$z_{n+1} := y(x_n) + \alpha hf(x_n, y(x_n)) + \beta hf(x_n + \gamma h, y(x_n) + \gamma hf(x_n, y(x_n)))$$

vi har

$$z_{n+1} = y(x_n) + \alpha hf + \beta hf + \beta\gamma h^2(f_y f + f_x) + \mathcal{O}(h^3),$$

derfor lokalavbrudsfeil $|y(x_{n+1}) - z_{n+1}| = \mathcal{O}(h^2)$ når $\alpha + \beta = 1$ (og metoden er konsistent), og $\alpha + \beta = 1$ samt $\beta\gamma = \frac{1}{2}$ garanterer at metoden har minst orden 2, dvs $|y(x_{n+1}) - z_{n+1}| = \mathcal{O}(h^3)$.

b) Anta at en metode av orden 2 av forrige type brukes for å løse $\dot{y} = -\lambda y, \quad y(0) = 1$, der λ er reell og positiv. Vis at følgen $\{y_n\}_{n\geq 0}$ er begrenset hvis og bare hvis $h \leq 2/\lambda$ og at for slike verdier av λ får man

$$|y(x_n) - y_n| \leq \frac{1}{6}\lambda^3 h^2 x_n. \tag{1}$$

Hint For å bevise (1) kan man først bruke Taylorsteorem og finne en øvreskranke for $|y(h) - y_1|$. Deretter kan man bruke formelen

$$a^n - b^n = \sum_{k=0}^{n-1} a^k(a - b)b^{n-k-1},$$

for å fullføre beviset.

Fasit Ved å bruke metoden på $\dot{y} = -\lambda y$, $y(0) = 1$ og orden-2 betingelser, finner mann at

$$y_n = (1 + z + \frac{z^2}{2})^n, \quad z = -\lambda h.$$

Derfor er $\{y_n\}_{n\geq 0}$ begrenset hvis og bare hvis

$$|1 + z + \frac{z^2}{2}| \leq 1,$$

dvs. hvis og bare hvis

$$-\lambda h + \frac{\lambda^2 h^2}{2} \leq 0, \quad \text{og} \quad |-\lambda h + \frac{\lambda^2 h^2}{2}| \leq 2,$$

dvs. hvis og bare hvis $h \leq \frac{2}{\lambda}$.
Fra Taylorsteorem (s. 22 og 23 Cheney and Kincaid) har vi

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \frac{e^\xi}{4!} z^4, \quad \xi \in [z, 0],$$

her er $z = -h\lambda < 0$. Dette gir

$$|y(h) - y_1| = |e^z - 1 - z - \frac{z^2}{2}| = |\frac{z^3}{3!} + \frac{e^\xi}{4!} z^4| \leq \frac{(h\lambda)^3}{3!} |-1 + \frac{e^\xi}{4} h\lambda| \leq \frac{(h\lambda)^3}{3!}.$$

Vi setter $r(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2}$ og anta at $|z| = h\lambda \leq 2$ slik at $|r(z)| \leq 1$. Ved å bruke den oppgitte formelen får vi

$$|y(x_n) - y_n| = |e^{zn} - r(z)^n| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |e^{zk}(e^z - r(z)) r(z)^{n-k-1}| \leq n|e^z - r(z)| \leq \frac{\lambda^3 h^2}{6} x_n.$$