**Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet**
**Institutt for matematiske fag**



Faglig kontakt under eksamen:
Anne Kværnø (73593542)

# EKSAMEN I MA2501 NUMERISKE METODER

Mandag 26. mai 2008
Tid: 09:00 – 13:00

Sensur: 16.juni

Hjelpemidler:

- Cheney & Kincaid, *Numerical Mathematics and Computing*, 5. eller 6. utgave.
- Notat om fikspunktiterasjoner.
- Godkjent kalkulator.

Generelt:

- Alle svar skal begrunnes.
- Besvarelsen skal inneholde så mange mellomregninger at det tydelig framkommer hvilke metoder og mellomresultater som benyttes.

**Oppgave 1** Bruk sammensatt Simpsons metode med skrittlengde $h = 0.5$ for å finne en tilnærmelse til integralet

$$\int_0^2 2^{-x} dx.$$

Finn en øvre grense for feilen.

**Oppgave 2** Gitt ligningen

$$x = g(x) = 2^{-x}.$$

Bruk $x_0 = 0.0$, og utfør tre fikspunktiterasjoner

$$x_{n+1} = g(x_n).$$

Velg selv startverdi.

Vis at $g(x)$ har et unikt fikspunkt $x^*$, og at $x_n \to x^*$ for $n \to \infty$ uansett valg av startverdier.

**Oppgave 3** Gitt en funksjon $f$. Funksjonsverdien til $f$ er kjent i noen punkter, gitt i tabellen

| $x_i$ | 0.0 | 0.75 | 1.0 |
|---|---|---|---|
| $f(x_i)$ | 1.2 | 3.6 | 2.4 |

.

**a)** Finn polynomet $p(x)$ av lavest mulig grad som interpolerer punktene i tabellen.

**b)** Finn et polynom $q(x)$ av lavest mulig grad som interpolerer punktene i tabellen over, og som i tillegg tilfredstiller $q'(0.75) = f'(0.75) = -2.95$.

**Hint:** La $q(x) = p(x) + r(x)$, der $p(x)$ er polynomet fra punkt **a)**. Hvilke nullpunkter har $r(x)$?

**c)** Vis at interpolasjonsfeilen $q(x) - f(x)$ kan skrives som

$$q(x) - f(x) = K \cdot f^{(4)}(\xi(x)) \cdot w(x)$$

der $K$ er en konstant og $w(x) = x(x - 0.75)^2(x - 1.0)$. Oppgi $K$.

**Oppgave 4** Gitt differensialligningen

$$\frac{\partial u}{\partial t} = x \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1}$$

for $0 < x < 1$, $t > 0$ og med med rand- og startbetingelser

$$u(0,t) = 1, \quad u(1,t) = 0, \quad \text{og} \quad u(x,0) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right).$$

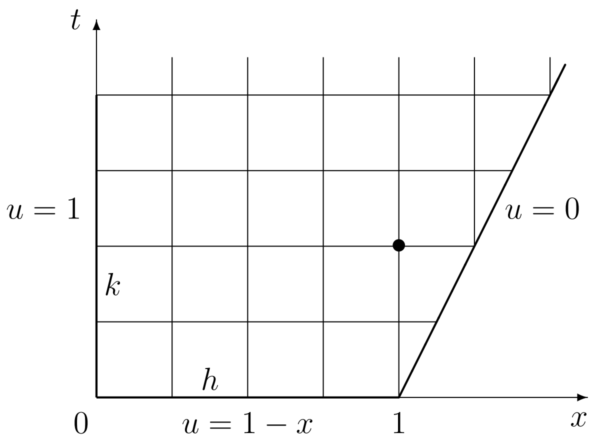
**a)** Bruk skrittlengde $k$ i $t$-retning, $h$ i $x$-retning, og sett opp et eksplisitt differanseskjema for ligningen.

Gjør et skritt i tid, med $h = 0.25$ og $k = 0.025$.

**b)** Anta nå at den høyre randa beveger seg, slik at ligningen (1) gjelder på intervallet

$$0 < x < x_R(t) = 1 + 5t,$$

se figur.




Bruk skrittlengder $h$ og $k$ som i punkt **a)**, og tilpass differanseskjemaet til problemet med bevegelig rand.

Finn en tilnærmelse til $u(1.0, 0.05)$.