**Norges teknisk–**
**naturvitenskapelige universitet**
**Institutt for matematiske fag**



Faglig kontakt under eksamen:
Brynjulf Owren (93518)
Arne Marthinsen (900 46025)

# EKSAMEN I FAG SIF5040
# NUMERISKE METODER

Tirsdag 14. mai 2002
Tid: 09:00–14:00

Hjelpemidler: Alle trykte og håndskrevne hjelpemidler tillatt (A).

**Generelt:**

- Besvarelsen skal inneholde så mange mellomregninger at det tydelig går frem hvilke metoder og mellomresultater som er anvendt.
- Sensuren faller i uke 23.

**Oppgave 1** Gitt det lineære ligningssystemet

$$Ax = b, \tag{1}$$

hvor $A$ er en $n \times n$-matrise og $b$ er en vektor med lengde $n$.

**a)** La $\alpha \neq \frac{4}{5}$ være et kjent tall og la

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & \alpha \end{pmatrix}.$$

La $\beta$ være et kjent tall, og la

$$b = \begin{pmatrix} 3 \\ -\beta \\ \beta \end{pmatrix}.$$

Finn løsningen til ligningssystemet (1) uttrykt med $\alpha$ og $\beta$ med Gauss-eliminasjon med skalért, delvis pivotering. Angi antakelser du gjør underveis.

**Fasit:** Skaléringsvektoren blir $s = [4, 3, 2]$. La videre indeks-vektoren $\ell = [1, 2, 3]$. Algoritmen sier at vi skal vurdere størrelsene

$$\left\{ \frac{|a_{\ell_i,1}|}{s_{\ell_i}} : 1 \leq i \leq 3 \right\}.$$

Siden $\alpha$ er en ukjent størrelse som potensielt kan påvirke denne vurderingen, antar vi at den ikke spiller noen rolle for pivoteringsprosessen. Det vil si at vi antar $\alpha < 2$.

Forholdene vi søker blir, for første kolonne,

$$\left\{ \frac{|a_{\ell_i,1}|}{s_{\ell_i}} : 1 \leq i \leq 3 \right\} = \left\{ \frac{4}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{2} \right\}.$$

Den oppdaterte indeks-vektoren blir derfor $\ell = [1, 2, 3]$. Etter eliminasjon i første kolonne får vi

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & \alpha - \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -\beta - \frac{3}{4} \\ \beta - \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

De neste forholdene blir

$$\left\{ \frac{|a_{\ell_i,2}|}{s_{\ell_i}} : 2 \leq i \leq 3 \right\} = \left\{ \frac{5}{6}, \frac{1}{2} \right\}.$$

Den oppdaterte indeks-vektoren blir fremdeles uforandret, $\ell = [1, 2, 3]$. Etter eliminasjon i andre kolonne får vi

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & \alpha - \frac{4}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -\beta - \frac{3}{4} \\ \frac{7}{5}\beta - \frac{11}{12} \end{pmatrix}.$$

Tilbakesubstitusjon gir løsningen

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-9\alpha - 3\beta + 2\alpha\beta - 6}{10\alpha - 8} \\ x_2 &= \frac{-3\alpha - \beta - 4\alpha\beta + 6}{10\alpha - 8} \\ x_3 &= \frac{7\beta - 6}{5\alpha - 4}. \end{aligned}$$

**b)** For hvilke verdier av $\alpha$ er vi garantert at Gauss–Seidel-iterasjonene konvergerer? Sammenligne med eventuelle antakelser fra oppgave **a)**.

**Fasit:** Diagonaldominans sikrer konvergens av Gauss–Seidel-iterasjonene. Det har vi dersom $|\alpha| > 4$, altså $\alpha > 4$ eller $\alpha < -4$. Antagelsen vi gjorde i oppgave **a)** holder ikke i dette tilfellet. Det gjør imidlertid ikke noe, da vi i dette tilfellet benytter en annen numerisk metode som gjør bruk av andre forutsetninger.

**c)** La $\alpha = 5$ og $\beta = 1$. Utfør tre iterasjoner med Gauss–Seidel-metoden. La startvektoren være $x^{(0)} = (0, 0, 0)^T$.

**Fasit:** Vi får

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= 0.7500 & x_1^{(2)} &= 1.0083 & x_1^{(3)} &= 1.0864 \\ x_2^{(1)} &= -0.5833 & x_2^{(2)} &= -0.7139 & x_2^{(3)} &= -0.7229 \\ x_3^{(1)} &= 0.1333 & x_3^{(2)} &= 0.0822 & x_3^{(3)} &= 0.0546 \end{aligned}$$

**Oppgave 2** Anta at $y(x) = ax^2$, hvor $a$ er en konstant som vi ikke kjenner. Vi har gitt $x$ ulike verdier, $x_1, x_2, \dots, x_n$, og målt tilhørende verdier, $y_1, y_2, \dots, y_n$, for $y$.

**a)** Vis at $a$ gitt ved

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i x_i^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^4}$$

minimerer summen av kvadratiske avvik fra de målte verdiene.

**Fasit:** La

$$\begin{aligned}\varphi(a) &= \sum_{i=1}^{n} \left(a x_i^2 - y_i\right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} a^2 x_i^4 - \sum_{i=1}^{n} 2 a y_i x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \\ &= a^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^4 - 2a \sum_{i=0}^{n} y_i x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} y_i^2.\end{aligned}$$

Vi setter $\varphi'(a) = 0$ og får

$$\varphi'(a) = 2a \sum_{i=1}^{n} x_i^4 - 2 \sum_{i=1}^{n} y_i x_i^2 = 0,$$

som gir

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i x_i^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^4}.$$

**b)** Vi antar nå at $y(x) = b \sin^2 x$ og har gjort følgende observasjoner:

| $i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 0.0 | 0.5 | 1.0 | 1.5 | 2.0 | 2.5 | 3.0 |
| $y_i$ | 0.0087 | 0.1335 | 0.7724 | 0.9839 | 0.8499 | 0.4166 | 0.1043 |

Hvilken verdi vil du gi $b$?

**Fasit:** Tilsvarende som for **a)** får vi at

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i \sin^2(x_i)}{\sum_{i=1}^{n} \sin^4(x_i)} = 1.0229.$$

**Oppgave 3** Gitt den ordinære differensialligningen

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(t, x), \qquad x(t_0) = x_0.$$

**a)** Forklár ideen bak Eulers metode for løsning av ordinære differensialligninger. Hva skiller Taylor-rekke-metoder fra Runge–Kutta-metoder?

**Fasit:** Eulers metode integrerer ordinære differensialligninger på formen

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(t,x), \qquad x(t_0) = x_0.$$

Den har formen

$$x_{n+1} = x_n + hf(t_n, x_n),$$

og bruker lineære tilnærmelser for beregning av $x_{n+1}$. $h$ er skrittlengden til metoden. Det fins også en implisitt Eulers metode som har formen

$$x_{n+1} = x_n + hf(t_{n+1}, x_{n+1}).$$

Taylor-rekke-metoder baserer seg på at vi representerer løsningen ved dens Taylor-utvikling. Den har formen

$$x(t+h) = x(t) + hx'(t) + \frac{1}{2!}h^2x''(t) + \frac{1}{3!}h^3x'''(t) + \cdots + \frac{1}{m!}h^m x^{(m)}(t) + \cdots,$$

og en $m$te ordens metode krever eksplisitt beregning av deriverte av $x$ opp til orden $m$.

Runge–Kutta-metoder benytter kun funksjonsevalueringer i beregningen av et skritt. Et eksempel på en Runge–Kutta-metode er følgende 2. ordens metode:

$$x(t+h) = x(t) + \frac{h}{2}\left(f(t,x(t)) + f(t+h, x(t) + hf(t,x(t)))\right).$$

Eulers metode er både en Taylor-rekke-metode og en Runge–Kutta-metode.

**b)** Hva mener vi med en metodes orden?

**Fasit:** Med en metodes orden mener vi hvor godt den numeriske tilnærmelsen metoden genererer tilnærmer den eksakte løsningen som en funksjon av metodens skrittlengde.

Dersom $x(t_{n+1})$ er den eksakte løsningen til et problem ved tidspunkt $t_{n+1}$ og $x_{n+1}$ er den numeriske løsningen generert av metoden etter ett skritt fra startpunktet $x(t_n)$, vil

$$x(t_{n+1}) - x_{n+1} = \mathcal{O}(h^{p+1}),$$

hvor $p$ er metodens orden.

**c)** La

$$f(t,x) = 1 - t^2 - x^2 \qquad \text{og} \qquad x(0) = 0.$$

Finn en tilnærming til $x(1)$ ved å bruke Eulers (eksplisitte) metode med en skrittlengde på $h = 0.2$.

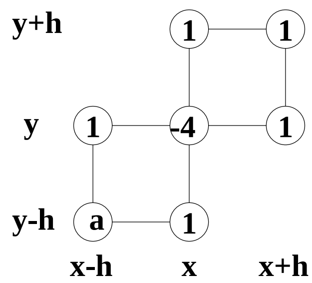
**Fasit:** Eulers eksplisitte metode tar ett skritt med lengde $h$ fra $x(t)$ på følgende måte:

$$x(t+h) = x(t) + hf(t, x(t))$$

Med $x(0) = 0$ og $f(t,x)$ som gitt i oppgaven, får vi

| $n$ | $t_n$ | $x_n$ | $x'_n$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0.0 | 0.0000 | 1.0000 |
| 1 | 0.2 | 0.1920 | 0.9600 |
| 2 | 0.4 | 0.3526 | 0.8031 |
| 3 | 0.6 | 0.4558 | 0.5157 |
| 4 | 0.8 | 0.4862 | 0.1523 |
| 5 | 1.0 | 0.4389 | −0.2364 |

**Oppgave 4** Du ønsker å løse Laplace-ligningen $u_{xx} + u_{yy} = 0$ på et område i planet. En kollega foreslår at du bruker stensilen




med samme nettstørrelse $h$ i både $x$- og $y$-retning.

Hvilken verdi må du velge for **a** for å få høyest mulig orden på stensilen? Hvilken orden oppnår du maksimalt?

**Fasit:** Vi Taylor-utvikler og finner først at $a = -1$ for at $u$ skal forsvinne. Vi står igjen med

$$\frac{u(x-h,y)+u(x+h,y)+u(x,y-h)+u(x,y+h)-4u(x,y)+u(x+h,y+h)-u(x-h,y-h)}{h^2}$$
$$= u_{xx} + y_{yy} + \frac{2(u_x+u_y)}{h} + \mathcal{O}(h).$$

Det gir et meget dårlig skjema, som faktisk er av orden $-1$.

**Oppgave 5** Vi ønsker i denne oppgaven å finne en tilnærmelse til integralet

$$I = \int_0^1 \frac{4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

**a)** Bruk Simpsons formel med to like delområder til å beregne en tilnærming til integralet $I$. Bruk videre Simpsons formel med fire like delområder. Hva får du nå?

**Fasit:** Simpsons formel er gitt ved

$$\int_a^{a+2h} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{h}{3}[f(a)+4f(a+h)+f(a+2h)].$$

I oppgaven er $a = 0$, $h = \frac{1}{2}$ og $b = 1$. Vi får første tilnærmelse:

$$I_1 = \frac{47}{15} \approx 3.133.$$

Dersom vi bruker fire like delområder, blir $h = \frac{1}{4}$ og

$$I_2 = \frac{8011}{2550} \approx 3.142.$$

**b)** Hvilken test ville du brukt for å avgjøre om nøyaktigheten til tilnærmelsen oppnådd i området er mindre enn $\varepsilon$ (altså ha et utgangspunkt for å styre en adaptiv prosess)?

Hva ville du gjort dersom den foreskrevne nøyaktigheten var $\varepsilon = 0.01$?

**Fasit:** Ved å betrakte feilen i integrasjon med Simpsons regel, kan man vise at

$$I = S^{(2)} + \frac{1}{15}\left(S^{(2)} - S^{(1)}\right),$$

hvor $S^{(1)}$ er svaret fra Simpsons regel anvendt på to interval mens $S^{(2)}$ er svaret fra Simpsons regel anvendt på fire like interval og $I$ er det eksakte integralet. Fra det kan man slutte at størrelsen

$$\frac{1}{15}\left|S^{(2)} - S^{(1)}\right|$$

kan brukes til å styre en adaptiv prosess. Vi krever altså at

$$\frac{1}{15}\left|S^{(2)} - S^{(1)}\right| < \varepsilon$$

i aktuelle interval.

I oppgaven er $\varepsilon$ oppgitt til 0.01. Vi finner at

$$\frac{1}{15}\left|S^{(2)} - S^{(1)}\right| = \frac{7}{12750} \approx 0.0005 < \varepsilon,$$

og kravet for å oppnå den foreskrevne nøyaktigheten er oppfylt på intervalet.

**Oppgave 6** En funksjon $f$ er kjent i tre punkt:

| $i$ | $x_i$ | $f(x_i)$ |
|---|---|---|
| 0 | 0.5 | 0.2762 |
| 1 | 1.5 | 0.2027 |
| 2 | 2.0 | 0.6323 |

**a)** Finn polynomet med lavest mulig grad som interpolerer $f$ i de tre punktene. Bruk polynomet til å finne tilnærmelser til $f(0.75)$ og $f(1.0)$.

**Fasit:** Polynomet må være av grad 2. Vi bruker dividerte differenser, og får tabellen

| $i$ | $x_i$ | $f[x_i]$ | $f[x_i, x_{i+1}]$ | $f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.5 | 0.2762 | | |
| | | | −0.0735 | |
| 1 | 1.5 | 0.2027 | | 0.6218 |
| | | | 0.8592 | |
| 2 | 2.0 | 0.6323 | | |

Det gir interpolasjonspolynomet

$$p_2(x) = 0.2762 - 0.0735(x - 0.5) + 0.6218(x - 0.5)(x - 1.5).$$

Tilnærmelser til $f(0.75)$ og $f(1.0)$ er gitt ved henholdsvis

$$p_2(0.75) = 0.1412$$

og

$$p_2(1.0) = 0.0840.$$

**b)** Hva kan du si om feilen til interpolasjonspolynomet i punktet $x = 1.5$?

**Fasit:** Ved definisjon er feilen til interpolasjonspolynomet i punktet $x = 1.5$, som er et interpolasjonspunkt, lik null.