Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Anne Kværnø (73593542 / 92663824)

EKSAMEN I MA2501 NUMERISKE METODER

Mandag 30. mai 2005
Tid: 09:00 - 13:00

Hjelpemidler: Cheney & Kincaid, *Numerical Mathematics and Computing*. 4. eller 5. utgave.
Godkjent lommeregner.

Sensur 20. juni 2005.

- Alle svar skal begrunnes.
- Besvarelsen skal inneholde så mange mellomregninger at det kommer tydelig fram hvilke metoder og mellomresultater som er anvendt.

Oppgave 1 Gitt

$$S(x) = \begin{cases} 6 + 7x + 6x^2 + x^3 & -2 \leq x \leq -1 \\ 4 + x - x^3 & -1 \leq x \leq 1 \\ 2 + 7x - 6x^2 + x^3 & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Er $S(x)$ en naturlig kubisk spline?

Oppgave 2 La $\mathcal{R}$ være kvadratet $\{(x,y) \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$. Betrakt Laplaceligningen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (x,y) \in \mathcal{R}$$

med randkravet

$$u(x,y) = x + y \quad \text{på randa av } \mathcal{R}.$$

a) En måte å beregne tilnærmelser $u_{i,j} \approx u(i/3, j/3)$, $i = 1,2$ og $j = 1,2$ er å løse ligningssystemet

$$\begin{array}{rrrrrrrl} & 4u_{1,1} & - & u_{2,1} & - & u_{1,2} & = & \frac{2}{3} \\ - & u_{1,1} & + & 4u_{2,1} & - & u_{2,2} & = & 2 \\ - & u_{1,1} & + & 4u_{1,2} & - & u_{2,2} & = & 2 \\ - & u_{2,1} & - & u_{1,2} & + & 4u_{2,2} & = & \frac{10}{3} \end{array} \qquad (1)$$

Forklar hvorfor, uten å løse ligningssystemet.

b) Følgende tilnærmelser til løsningen av (1) er gitt:

$$u_{1,1} \approx 0.7, \quad u_{2,1} \approx 1, \quad u_{1,2} \approx 1, \quad u_{2,2} \approx 1.3$$

Bruk disse tilnærmelsene som startverdier i Gauss-Seidel iterasjonsmetode. Iterer bare en gang.

Vil Gauss-Seidel iterasjoner konvergere for dette ligningssystemet?

Oppgave 3 Konsentrasjonen av oppløst oksygen i vann er et viktig element i analyse av vannkvalitet. Metningsverdiene er en funksjon av temperaturen. Tabellen gir metningsverdier (D) for noen temperaturer (T).

T (°C)	5	10	15	20
D (mg/l)	12.80	11.33	10.15	9.17

Bruk samtlige verdier for å finne en best mulig tilnærmelse til metningsverdien D ved 13 °C. Du kan velge framgangsmåte selv, men det skal komme klart fram hvilken metode som er benyttet.

Oppgave 4 Gitt følgende integral

$$\int_2^3 \sin^2(x)dx$$

a) Bruk trapesmetoden med $h = 0.2$ for å finne en tilnærmelse til integralet.

Finn en øvre grense for feilen.

Anta at vi i stedet for trapesmetoden vil bruke midtpunktmetoden, gitt ved

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i + \frac{h}{2}) \tag{2}$$

der $h = (b-a)/n$, $x_i = a + ih$ og $i = 0, 1, \cdots, n$.

b) Vis at feilen som gjøres over et delintervall er gitt ved

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx - hf(x_i + \frac{h}{2}) = \frac{h^3}{24}f''(\xi), \qquad \xi \in (x_i, x_{i+1})$$

Bruk dette til å finne feilen for den sammensatte midtpunktmetoden (2).

Oppgave 5 Gitt følgende MATLAB-skript

```
x = [5;2];
fprintf('i = %2d,  x1 = %10.8f,  x2 = %10.8f \n',0,x(1),x(2))
for i=1:10
    [f,J] = func(x);
    h = -J\f;
    x = x + h;
    fprintf('i = %2d,  x1 = %10.8f,  x2 = %10.8f \n',i,x(1),x(2));
end
```

med tilhørende funksjon

```
function [f,J] = func(x)
f = zeros(2,1);
J = zeros(2,2);
f(1) = x(1)^2+x(2)^2-25;
f(2) = x(1)^2-x(2)-2;
J(1,1) = 2*x(1);
J(1,2) = 2*x(2);
J(2,1) = 2*x(1);
J(2,2) = -1;
```

Hvilket problem løser dette skriptet, og med hvilken metode?

Skriptet gir følgende utskrift, hvor to verdier er fjernet.

```
i =  0,  x1 = 5.00000000,  x2 = 2.00000000
i =  1,  x1 = ----------,  x2 = ----------
i =  2,  x1 = 2.61079305,  x2 = 4.42033898
i =  3,  x1 = 2.51629518,  x2 = 4.32281159
i =  4,  x1 = 2.51432483,  x2 = 4.32182548
i =  5,  x1 = 2.51432404,  x2 = 4.32182538
i =  6,  x1 = 2.51432404,  x2 = 4.32182538
i =  7,  x1 = 2.51432404,  x2 = 4.32182538
i =  8,  x1 = 2.51432404,  x2 = 4.32182538
i =  9,  x1 = 2.51432404,  x2 = 4.32182538
i = 10,  x1 = 2.51432404,  x2 = 4.32182538
```

Fyll ut de verdiene som mangler.