EKSAMEN MA2501 NUMERISKE METODER
LØSNINGSFORSLAG
Mai 2009

Oppgave 1

a) Interpolasjonspolynomet blir

$$p(x) = \frac{\ln 2}{6}(-x^2 + 9x - 8) = -0.1155x^2 + 1.0397x - 0.9242.$$

Feilen i interpolasjonspolynomet er gitt ved ($n = 2$)

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}(x-1)(x-2)(x-4),$$

eller

$$|f(x) - p(x)| \le \frac{\max_{1<x<1} |f^{(3)}(x)|}{3!} \max |(x-1)(x-2)(x-3)| \qquad c\text{for} \qquad 1 \le x \le 4.$$

Her er $f^{(3)}(x) = 2/x^3$, dvs. $\max_{1<x<4} |f^{(3)}(x)| = 2$. Dessuten er $|(x-1)(x-2)(x-4)| \le (20 + 14\sqrt{7})/27 = 2.1$. Tilsammen gir dette

$$|\ln x - p(x)| \le 0.7 \qquad \text{for} \quad 1 \le x \le 4.$$

(I virkeligheten er feilen ca. 0.057, så grensen over er i overkant pessimistisk.)

b) Vi velger Chebyshev-nodene (se bakerst i oppgavesettet). Imidlertid må disse overføres til intervallet $[1, 4]$:

$$x_i = \frac{3}{2}t_i + \frac{5}{2}, \quad i = 0, 1, \cdots, n, \qquad \text{med} \quad t_i = \cos\left(\frac{2i+1}{2(n+1)}\pi\right)$$

Dessuten

$$\prod_{i=10}^{n} |x - x_i| = \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} \prod_{i=0}^{n} |t - t_i| \le \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} \frac{1}{2^n},$$

og

$$f^{(n+1)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}, \qquad \text{slik at} \quad |f^{(n+1)}(x)| \le n!, \quad 1 \le x \le 4.$$

Det betyr at

$$|\ln(x) - p(x)| \le \frac{n!}{(n+1)!}\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} \frac{1}{2^n} = \frac{2}{n+1}\left(\frac{3}{4}\right)^{(n+1)}.$$

Med litt prøv og feil finner vi at

$$\frac{2}{n+1}\left(\frac{3}{4}\right)^{(n+1)} \le 10^{-4} \qquad \text{for} \quad n \ge 24.$$

Oppgave 2

Finn et utrykk for feilen

$$E(h) = f(x) - \frac{3}{2h^3}\int_{-h}^{h} tf(x+t)dt.$$

Bruk Taylorutviklingen til $f(x+t)$ rundt x, samt middelverdisetningen for integraler. Det gir

$$\begin{aligned}\frac{3}{2h^2}\int_{-h}^{h} tf(x+t)dt &= \frac{3}{2h^3}\int_{-h}^{h} t\left(f(x)+tf'(x)+\frac{t^2}{2}f''(x)+\frac{t^3}{6}f'''(\xi(t))\right)dt\\ &= f'(x)+\frac{3}{2h^3}\frac{f'''(\nu)}{6}\int_{-h}^{h} t^4dt = f'(x)+\frac{h^2}{10}f'''(\nu),\end{aligned}$$

Så

$$E(h) = -\frac{h^2}{10}f'''(\nu)$$

der $x-h \leq \nu \leq x+h$.

Oppgave 3

a) Det linære ligningssystemet blir (med h=1/4)

$$\begin{bmatrix}-2.0625 & 1 & 0\\ 1 & -2.0625 & 1\\ 0 & 1 & -2.0625\end{bmatrix}\begin{bmatrix}U_1\\U_2\\U_3\end{bmatrix} = 0.25^2\begin{bmatrix}\sin(\pi/4)\\ \sin(\pi/2)\\ \sin(3\pi/4)\end{bmatrix}$$

med løsning $U_1 = U_3 = -0.06827,\ U_2 = -0.09641$.

NB! Det er en feil i ligning (2) i oppgaveteksten. Det ble opplyst om dette på eksamen, men studenter som har regnet med gal ligning, fikk beskjed om at de ikke behøvde å regne denne oppgaven på nytt.

b) Det linære ligningssystemet kan skrives som $AU = b$ der A er en tridiagonal matrise, med $-2-h^2$ på diagonalen, og 1 over og under diagonalen. Det betyr at matrisen er strengt diagonaldominant, dermed er den også ikke-singulær, og ligningssystemet har en unik løsning.

Feilanalysen: Følg samme argumentasjon som brukt i utdelt notat om to punkts randverdiproblemer.

La $u_i = u(x_i)$. Da har vi:

Differensialligningen: $$\frac{u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}}{h^2} - \frac{h^2}{12}u^{(4)}(\tau_i) - u_i = \sin(\pi x_i)$$

Differenseligningen: $$\frac{U_{i+1}-2U_i+U_{i-1}}{h^2} - U_i = \sin(\pi x_i)$$

der $\tau_i \in (x_i-h, x_i+h)$. Ta differansen mellom disse:

$$\frac{e_{i+1}-2e_i+e_{i-1}}{h^2} - e_i = \frac{h^2}{12}u^{(4)}(\tau_i)$$

eller

$$e_{i+1}-(2+h^2)e_i+e_{i-1} = h^4g_i, \qquad g_i = \frac{u^{(4)}(\tau_i)}{12}.$$

La j representere punktet (eller et av punktene) der feilen er størst, dvs. $|e_j| = \max_{i=1,\cdots,N-1}|e_i|$. Skriv om ligningen over, og bruk trekantulikheten:

$$(2+h^2)e_j = e_{j+1}+e_{j-1}-h^4g_j \qquad \Rightarrow \qquad (2+h^2)|e_j| \leq |e_{j+1}|+|e_{j-1}|+h^4|g_j| \leq 2|e_j|+h^4|g_j|.$$

Men det kan skrives om til

$$|e_j| \le h^2 |g_j|,$$

eller

$$\max_{i=1,\cdots,N-1} |e_i| \le \frac{h^2}{12} \max_x |u^{(4)}|.$$

c) I dette tilfellet er ikke lenger løsningen for $x = 1$ kjent, vi trenger altså en ligning som gjelder i dette punktet ($i = N$). Anta at definisjonsområdet for differensialligningen utvides til å gjelde for $x \ge 1$ også. Dermed vil (2) også gjelde for $i = N$. En 2.ordens tilnærmelse til randbetingelsene er gitt ved

$$\frac{U_{N+1} - U_{N-1}}{2h} + U_N = 1 \qquad \Rightarrow U_{N+1} = U_{N-1} + 2h(1 - U_N).$$

Settes det inn i differanseligningen (2) for $i = N$, får vi

$$\frac{2}{h^2} U_{N-1} - \frac{2 + h^2 + 2h}{h^2} U_N = -\frac{2}{h}$$

siden $\sin(\pi) = 0$. Denne kommer i tillegg til (2), slik at vi får et lineært ligningssystem i N ukjente. Matrisen er fortsatt tridiagonalt og strengt diagonaldominant.

Oppgave 4

a) System av første ordens ligninger:

$$\begin{aligned} v_1' &= v_2, & v_1(0) &= 0 \\ v_2' &= -4v_1, & v_2(0) &= 1. \end{aligned}$$

To skritt med Eulers metode, med $h = 0.1$ blir

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 1.0 \end{bmatrix} + 0.1 \begin{bmatrix} 1.0 \\ 0.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 1.0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 1.0 \end{bmatrix} + 0.1 \begin{bmatrix} 1.0 \\ -0.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.96 \end{bmatrix}$$

b) La $I(y(t)) = 4y(t)^2 + y'(t)^2$. Fra startbetingelsene i (3) ser vi at $I(y(0)) = 1$. $I(y(t))$ er konstant dersom $dI/dt = 0$. Siden $y'' = -4y$ har vi

$$\frac{dI(y(t))}{dt} = 8yy' + 2y'y'' = 8yy' - 8y'y = 0.$$

La $v_{1,n} \approx y(t_n)$ og $v_{2,n} \approx y'(t_n)$, og la $I_n = 4v_{1,n}^2 + v_{2,n}^2$. Fra figurene ser det ut til at I_n øker ved bruk av Eulers metode, mens den er konstant ved bruk av implisitt midtpunkt. La oss vise at det er tilfelle.

Eulers metode: Hypotese: $I_{n+1} > I_n$.

$$I_{n+1} = 4v_{1,n+1}^2 + v_{2,n+1}^2 = 4(v_{1,n} + hv_{2,n})^2 + (v_{2,n} - 4hv_{1,n})^2 = (1 + 4h^2)I_n > I_n.$$

Implisitt Midtpunkt: Hypotese: $I_{n+1} = I_n$.
IM anvendt på systemet i punkt a) gir

$$v_{1,n+1} = v_{1,n} + \frac{h}{2}(v_{2,n} + v_{2,n+1})$$
$$v_{2,n+1} = v_{2,n} + \frac{h}{2}(-4)(v_{1,n} + v_{1,n+1}).$$

Løs denne ligningen mhp. $v_{1,n+1}$ og $v_{2,n+1}$, og du får

$$v_{1,n+1} = \frac{1-h^2}{1+h^2} v_{1,n} + \frac{h}{1+h^2} v_{2,n}, \qquad v_{2,n+1} = -4\frac{h}{1+h^2} v_{1,n} + \frac{1-h^2}{1+h^2} v_{2,n}.$$

Det gir

$$I_{n+1} = 4\left(\frac{1-h^2}{1+h^2} v_{1,n} + \frac{h}{1+h^2} v_{2,n}\right)^2 + \left(-4\frac{h}{1+h^2} v_{1,n} + \frac{1-h^2}{1+h^2} v_{2,n}\right)^2 = 4v_{1,n}^2 + v_{2,n}^2 = I_n.$$