Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Anne Kværnø (92663824)

EKSAMEN I MA2501 NUMERISKE METODER

Fredag 29. mai 2009
Tid: 09:00 – 13:00

Sensur: 19.juni

Hjelpemidler:

- Cheney & Kincaid, *Numerical Mathematics and Computing*, 5. eller 6. utgave.
- Rottmann, *Matematisk formelsamling*
- Gyldig kalkulator.

Generelt:

- Alle svar skal begrunnes.
- Det fins noen nyttige formler bakerst i oppgavesettet.
- Besvarelsen skal inneholde så mange mellomregninger at det tydelig framkommer hvilke metoder og mellomresultater som benyttes.

Oppgave 1

a) Finn polynomet $p(x)$ av lavest mulig grad som interpolerer funksjonen $f(x) = \ln(x)$ i punktene $x = 1, 2, 4$.

Finn også en øvre grense for feilen $|f(x) - p(x)|$ for $1 \leq x \leq 4$.

b) Anta at du ønsker å finne et interpolasjonspolynom $p(x)$ som approksimerer $\ln(x)$ slik at $|\ln(x) - p(x)| \leq 10^{-4}$ for $1 \leq x \leq 4$. Forklar hvordan du vil velge interpolasjonspunkter, og hvor mange interpolasjonspunkter du trenger for å oppnå tilstrekkelig nøyaktighet.

Oppgave 2 Finn et uttrykk for feilen i approksimasjonsformelen

$$f'(x) \approx \frac{3}{2h^3} \int_{-h}^{h} t f(x+t) dt.$$

Oppgave 3 Gitt følgende randverdiproblem

$$u'' - u = \sin(\pi x), \qquad u(0) = u(1) = 0. \tag{1}$$

Dette skal løses med en endelig differansemetode, gitt ved

$$\frac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{h^2} - U_i = \sin(x_i), \qquad i = 1, \cdots, N-1. \tag{2}$$

der $h = 1/N$, $x_i = ih$ og $U_i \approx u(x_i)$.

a) Sett $N = 4$ og finn U_1, U_2 og U_3.

b) La nå N være vilkårlig. Vis at det lineære ligningssystemet (2) alltid har en entydig løsning.

Vis også at feilen $e_i = u(x_i) - U_i$ tilfredstiller

$$\max_{i=1,\cdots,N-1} |u(x_i) - U_i| \leq Ch^2.$$

Finn et uttrykk for C.
Hint: C avhenger av $\max_x |u^{(4)}(x)|$.

c) Erstatt høyre randbetingelse i (1) med betingelsen

$$u_x + u = 1, \qquad \text{når} \quad x = 1.$$

Hvordan vil dette endre differanseformelen (2).

Oppgave 4 Gitt differensialligningen

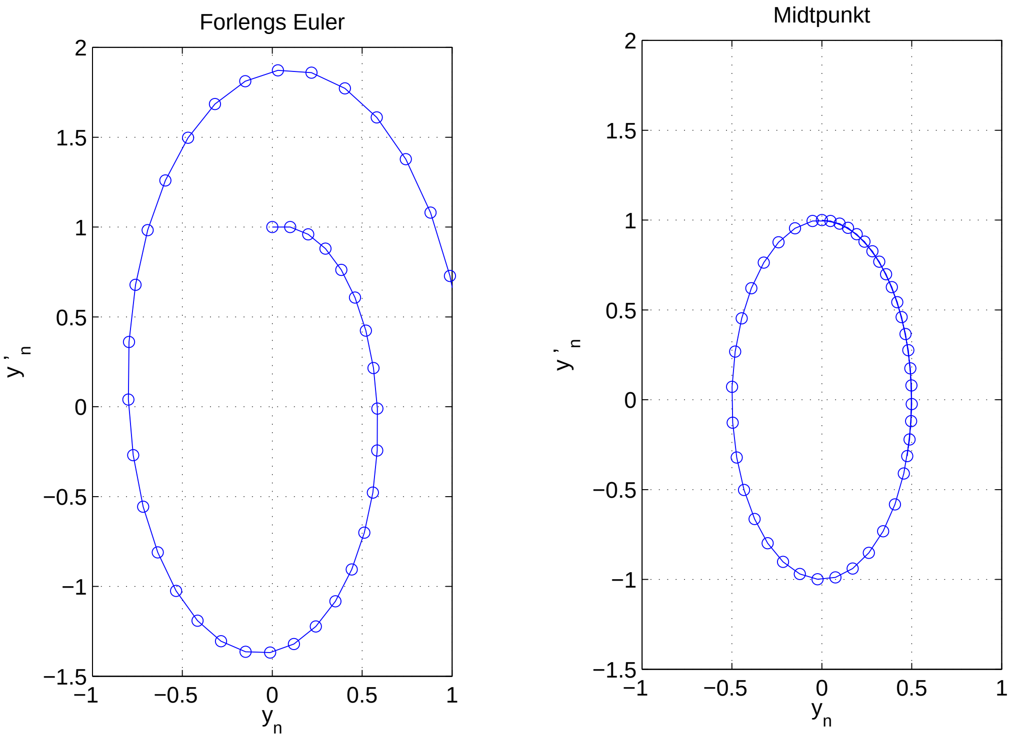
$$y'' + 4y = 0, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1. \tag{3}$$

a) Skriv ligningen om til et system av første ordens ligninger. Ta to skritt med Eulers metode, bruk skrittlengde $h = 0.1$.

b) Vis at den eksakte løsningen av (3) tilfredstiller

$$4y(t)^2 + y'(t)^2 = 1.$$

Ligning (3) er løst med Eulers metode og med implisitt midtpunkt metode, i begge tilfellene er $h = 0.1$. Resultatene er vist i figuren under. Gi en forklaring på hvorfor de numeriske løsningene oppfører seg som de gjør.



Tillegg:

- Chebyshev-noder: Hvis

$$x_i = \cos\left(\frac{2i+1}{2(n+1)}\pi\right), \qquad \text{for} \quad i = 0, \cdots, n$$

gjelder

$$\prod_{i=0}^{n} |x - x_i| \leq \frac{1}{2^n}, \qquad -1 \leq x \leq 1.$$

- Implisitt midtpunkts metode for $y' = f(t, y)$:

$$y_{n+1} = y_n + hf\left(t_n + \frac{h}{2}, \frac{y_{n+1} + y_n}{2}\right).$$