MA2501 Numeriske metoder

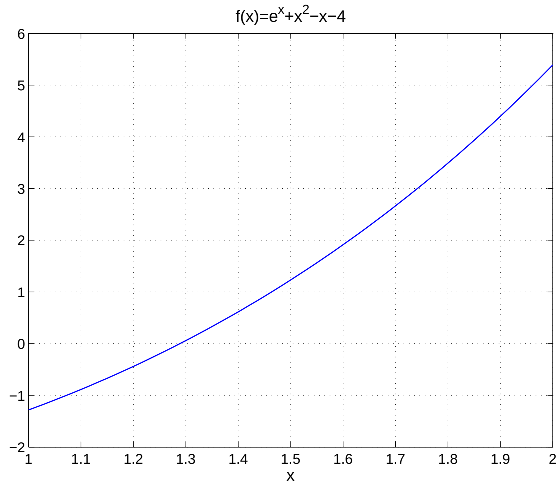
Vår 2009

Løsningsforslag øving 1

Oppgave 1

a) Funksjonen f har en entydig rot i $[1,2]$ fordi f er kontinuerlig og f skifter fortegn på intervallet ($f(1) = e - 4 < 0$ og $f(2) = e^2 - 2 > 2$).

Figuren under viser at rota ligger litt under 1.3.



Newtons metode er i dette tilfellet er gitt ved

$$x_{n+1} = x_n - \frac{e^{x_n} + x_n^2 - x_n - 1}{e^{x_n} + 2x_n - 1}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Resultatet med startverdi $x_0 = 1.5$ er gitt i tabellen under. I tabellen har jeg også skrevet inn feilen i iterasjonene. Eksakt løsning er ikke kjent, så jeg har brukt den numeriske løsningen etter 10 iterasjoner med Newtons metode som eksakt løsning (notasjonen $e-p$ betyr $\cdot 10^{-p}$). Det er tydelig at Newtons metode gir kvadratisk konvergens (som forventet).

n	x_n	$\lvert x_n - r \rvert$
0	1.500000000000000	$2.1132e-01$
1	1.309974058154903	$2.1296e-02$
2	1.288919795559579	$2.4183e-04$
3	1.288677998433624	$3.1610e-08$
4	1.288677966823869	$6.6613e-16$
5	1.288677966823868	0

b) Se på skjemaet gitt ved i),

$$x_{n+1} = \ln(4 + x_n - x_n^2).$$

All Matlab-kode er gitt i skriptet `ov1_oppg1b.m`. Det kan være en ide å starte med å laste ned og kjøre dette. Vi kan konstatere at fikspunktiterasjonene konvergerer for $x_0 = 1.5$.

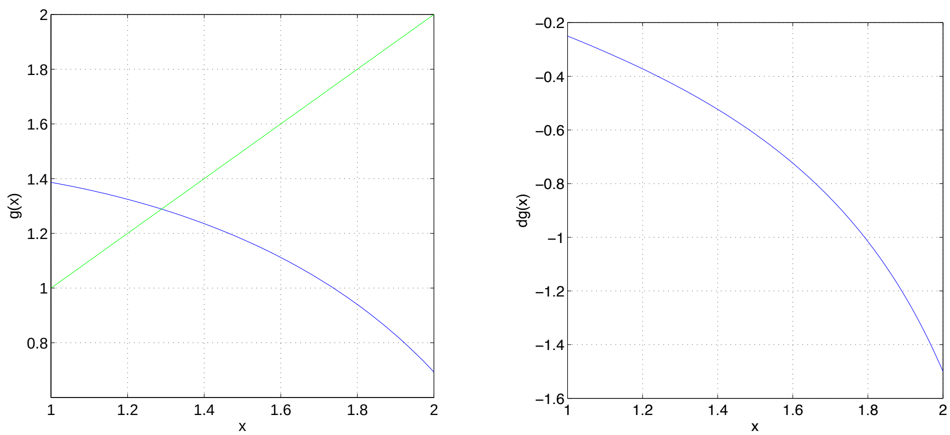
Analyse: Iterasjonene konvergerer mot $r \in [a, b]$ for alle startverdier $x_0 \in [a, b]$ dersom de to betingelsene

a) $g([a, b]) \subseteq [a, b]$.

b) $g'(x) \leq \rho < 1$ for alle $x \in (a, b)$.

er oppfyllt.

Figuren under viser $g(x)$ og $g'(x)$.



Skissene viser at de to betingelsene er oppfyllt på intervallet $[1, 1.7]$.

For å vise antall iterasjoner som trengs, la oss begrense intervallet til $[1, 1.5]$. Funksjonene g og g' er begge monotont avtagende på dette intervallet (på eksamen bør du kunne vise det teoretisk), slik at $g([1, 1.5]) = [g(1.5), g(1)] = [1.1787, 1.3863] \subset [1, 1.5]$ og $|g'(x)| \leq \max(|g'(1)|, |g'(1.5)|) = 0.6154 = \rho < 1$.

Korrolær 1 i notatet gir følgende *feilgrense*:

$$|r - x_n| \leq \frac{\rho^n}{1 - \rho}|x_1 - x_0|$$

Det betyr at vi må kreve at

$$\frac{\rho^n}{1 - \rho}|x_1 - x_0| \leq 10^{-6}.$$

Løs dette mhp. ρ^n, ta logaritmen på begge sider, bruk det faktum at $\rho \in (0, 1)$, og vi får

$$n \geq \frac{\log(1 - \rho) - \log(|x_1 - x_0|) + \log(10^{-6})}{\log(\rho)}.$$

Med $\rho = 0.6154$, $x_0 = 1.5$, $x_1 = g(x_0) = 1.1787$ gir dette $n \leq 28.085$. Men antall iterasjoner er nødvendigvis et heltall, så vi konkluderer:

Med startverdi $x_0 = 1.5$ vil fikspunktiterasjonene resultere i en tilnærmelse x_n som oppfyller $|r - x_n| \leq 10^{-6}$ for $n \geq 29$.

I praksis oppnådde vi denne nøyaktigheten etter bare 15 iterasjoner. Vi kan gjøre analysen mer presis ved å konstatere følgende: for alle $x_0 \in [1, 2]$ vil $x_1 \in [1, 1.4]$. Betingelsene a) og b) er oppfyllt på dette intervallet med $\rho = |g'(1.4)| = 0.5233$. Dessuten må $|x_2 - x_1| \leq 0.4$. Vi må dermed kreve at n oppfyller

$$\frac{\rho^{n-1}}{1-\rho}|x_2 - x_1| \leq 10^{-6},$$

eller $n \geq 23$.

Konklusjon: Iterasjonene konvergerer for alle $x_0 \in [1, 2]$, og $|r - x_n| \leq 10^{-6}$ etter maksimalt 23 iterasjoner.

Helt til sist kan vi se på det konkrete eksempelet, med $x_0 = 1.5$ slik at $x_1 = 1.1787$ og $x_2 = 1.3322$. I så fall er ønsket nøyaktighet oppnådd etter 21 iterasjoner, noe som ikke er alt for langt unna det vi målte.

ii) Ingen konvergens siden $g'(r) > 1$.

iii) Ingen konvergens av samme grunn som over.

Oppgave 2

Siden r ligger i intervallet $[a, b]$ må nødvendigvis $|r - x| < 0.5(b - a)$ der x er midtpunktet i intervallet. Intervallet halveres for hver iterasjon. Starter vi med intervallet [1,2] får vi

$$|r - x| \leq 0.5^n \leq 10^{-6} \qquad \Rightarrow \qquad n \geq 20$$

Oppgave 3

Vi ser at x kan tolkes som $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ der $x_0 = \sqrt{p}$, $x_1 = \sqrt{p+\sqrt{p}}$, osv., slik at $x_{n+1} = \sqrt{p + x_n}$. Det betyr igjen at x er en løsning av ligningen $x = \sqrt{p+x}$ eller $x^2 - x - p = 0$. Så

$$x = \frac{1}{2} + \sqrt{p + \frac{1}{4}}$$

Oppgave 4

3.2.33, s.103
En modifisert versjon av Newtons metode er gitt ved

$$x_{n+1} = x_n + \frac{f(x_n)}{f'(x_0)}. \tag{1}$$

Med dette skjemaet trenger vi kun å evaluere f' i startpunktet x_0, noe som kan være en fordel dersom den deriverte er vanskelig å regne ut eller beregningsmessig kostbar å evaluere.

Vi skal finne konvergensordenen til metoden. Til dette bruker vi samme teknikk som er brukt på side 94 i læreboka (i beviset for kvadratisk konvergens av Newtons metode).

La $x = r$ være løsningen av $f(x) = 0$ (r er rot i likningen). Feilen $e_n = r - x_n$ er gitt ved

$$e_{n+1} = r - \left(x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)} \right) = e_n + \frac{f(x_n)}{f'(x_0)}. \tag{2}$$

Ved Taylorutvikling av $f(x_n)$ rundt $r = x_n + e_n$ får vi at

$$f(x_n) = f(r - e_n) = \underbrace{f(r)}_{=0} - f'(\xi)e_n \tag{3}$$

for en eller annen ξ mellom x_n og r. Dermed har vi

$$e_{n+1} = e_n + \frac{f(x_n)}{f'(x_0)} = e_n - \frac{f'(\xi)}{f'(x_0)} e_n, \tag{4}$$

så i absoluttverdi er

$$|e_{n+1}| = |e_n - \frac{f'(\xi)}{f'(x_0)} e_n| \leq \max_{\zeta\in\Omega} \left| 1 - \frac{f'(\zeta)}{f'(x_0)} \right| |e_n| = K|e_n|. \tag{5}$$

Metoden gir altså lineær konvergens (i motsetning til vanlig Newton, som gir kvadratisk konvergens).

NB! Du kunne også brukt Teorem 2 i notatet om fikspunktiterasjoner.

3.3.12, s. 122

Olvers metode er gitt ved

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{1}{2}\frac{f''(x_n)}{f'(x_n)}\Big(\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\Big)^2, \tag{6}$$

for å finne løsningen $x = r$ av likningen $f(x) = 0$. Vi skal vise numerisk at metoden har kubisk konvergens, det vil si at

$$e_{n+1} \leq Ke_n^3, \tag{7}$$

der $e_n = r - x_n$. Videre forventer vi en tredobling av antall korrekte siffer i x_n for hver ny iterasjon (se argumentet for Newtons metode på side 93 i læreboka).

Olvers metode er implementert i `olver.m`. Velg et passende test-problem, f.eks. ligningen fra oppgave 1, implementert i `fov1_oppg3.m`. Prøv følgende:

```
>> x = olver(@fov1_oppg3,1.5,10)
>> fov1_oppg3(r)
>> r = x
>> x = olver(@fov1_oppg3,1.5,10,r)
```

Resultatet er gitt ved

n	x_n	$\lvert r - x_n\rvert$
0	1.50000000000000	$2.11e-01$
1	1.29191912886784	$3.24e-03$
2	1.28867798268688	$1.59e-08$
3	1.28867796682387	$0.00e+00$
	$\vdots$	

Dette konvergerer så raskt at det er vanskelig å konkludere sikkert med noe som helst, men det kan se ut som om $|r - x_{n+1}| \sim |r - x_n|^3$, dvs. kubisk konvergens.

Vi kan vise at Olver's metode har (minst) kubisk konvergens ved bruk av Teorem 2 i notatet, med

$$g = x - \frac{f}{f'} - \frac{1}{2}\frac{f''}{f'}\left(\frac{f}{f'}\right)^2$$

$$g' = -f^2\frac{f'f''' - 3(f'')^2}{2(f')^4} = f^2h, \qquad g'(r) = f(r)^2h(r) = 0$$

$$g'' = 2ff'h + f^2h', \qquad g''(r) = f(r)\big(2f'(r)h(r) + f(r)h'(r)\big) = 0.$$