MA2501 Numeriske metoder

Vår 2009

Løsningsforslag øving 2.

Oppgave 1

7. Taylor-rekkene er avbrutt for tidlig. Ta med flere ledd, og vi får:

$$\frac{1}{h^2}\left(f(x+h)-2f(x)+f(x-h)\right)=f''(x)+\frac{h^2}{24}\left(f^{(4)}(\xi_1)+f^{(4)}(\xi_2)\right)=f''(x)+\frac{h^2}{12}f^{(4)}(\eta).$$

10.a Vil bli løst senere:

10.b Vi må løse ligningssystemet:

$$\begin{aligned}
&f=1, &&\Rightarrow && 0=A+B+C\\
&f=(x-x_1) &&\Rightarrow && 0=A(x_0-x_1)+B(x_1-x_1)+C(x_2-x_1)\\
&f=(x-x_1)^2 &&\Rightarrow && 2=A(x_0-x_1)^2+B(x_1-x_1)^2+C(x_2-x_1)^2
\end{aligned}$$

med $x_1-x_0=h$ og $x_2-x_1=\alpha h$. Ligningssystemet har løsningen

$$A=\frac{2}{h^2(1+\alpha)},\quad B=-\frac{2}{h^2\alpha},\quad C=\frac{2}{h^2\alpha(1+\alpha)}.$$

11 Ved Taylor-utvikling rundt x_1 finner vi

$$\begin{aligned}
\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_0}&=\frac{f(x_1)+\alpha hf'(x_1)+\frac{1}{2}\alpha^2h^2f''(x_1)+\mathcal{O}(h^3)-f(x_1)+hf'(x_1)-\frac{1}{2}h^2f''(x_1)+\mathcal{O}(h^2)}{h(1+\alpha)}\\
&=f'(x_1)+\frac{1}{2}(\alpha-1)hf''(x_1)+\mathcal{O}(h^2).
\end{aligned}$$

Hvis x_1 ligger midt mellom x_0 og x_2 er $\alpha=1$ og det første ordens leddet faller bort.

18 Vi har

$$\begin{aligned}
L&=\varphi(h)+c_1h^{1/2}+c_2h^1+c_3h^{3/2}+\cdots\\
L&=\varphi(h/2)+c_1(h/2)^{1/2}+c_2h/2+c_3(h/2)^{3/2}+\cdots
\end{aligned}$$

Multipliser siste ligning med $\sqrt{2}$ og trekk fra den første, og vi får

$$(\sqrt{2}-1)L=\sqrt{2}\varphi(h/2)-\varphi(h)+(\sqrt{2}/2-1)c_2h+\cdots$$

Løst med hensyn på L, gir dette:

$$L=\frac{\sqrt{2}\varphi(h/2)-\varphi(h)}{\sqrt{2}-1}+\frac{\sqrt{2}}{2}c_2h+\cdots$$

Oppgave 2

For demonstrasjonen sin del vises resultatet av hvert eliminasjonsskritt. Multiplikatorene $m_{p_i,j}$ kan lagres i de ledige plassene i A-matrisa, her merker vi dem som understreket. Pivot-elementene som skal brukes merkes med en ramme.

Naiv Gauss - algoritme 6.1

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 4 & 20 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ \underline{3} & \boxed{\text{-2}} & -3 \\ \underline{4} & 12 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ \underline{3} & -2 & -3 \\ \underline{4} & \underline{-6} & \boxed{\text{-14}} \end{bmatrix}$$

Ingen pivotering er påkrevet.

Delvis pivotering - algoritme 6.2

Pivoteringsvektoren vises under matrisen.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \\ \boxed{4} & 20 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \underline{0.25} & -3 & -1 \\ \underline{0.75} & \boxed{\text{-11}} & -6 \\ 4 & 20 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \underline{\frac{1}{4}} & \underline{\frac{3}{11}} & \boxed{\frac{7}{11}} \\ \underline{\frac{3}{4}} & -11 & -6 \\ 4 & 20 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Skalert delvis pivotering - algoritme 6.3 Skaleringsvektoren er $s = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 20 \end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ \boxed{3} & 4 & 0 \\ 4 & 20 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \underline{\frac{1}{3}} & \frac{2}{3} & 1 \\ 3 & 4 & 0 \\ \underline{\frac{4}{3}} & \boxed{\frac{44}{3}} & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \underline{\frac{1}{3}} & \underline{\frac{1}{22}} & \boxed{\frac{7}{11}} \\ 3 & 4 & 0 \\ \underline{\frac{4}{3}} & \frac{44}{3} & 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$