MA2501 Numeriske metoder

Vår 2009

Løsningsforslag øving 3.

Oppgave 1

a) Fra

$$\|b\| = \|Ax\| \le \|A\|\|x\|$$

og

$$\|e\| = \|x - \tilde{x}\| = \|A^{-1}b - A^{-1}(r+b)\| \le \|A^{-1}\|\|r\|,$$

får vi

$$\frac{\|e\|}{\|x\|} \le \kappa(A)\frac{\|r\|}{\|b\|},$$

der $\kappa(A) = \|A^{-1}\|\|A\|$.

b)

$$\widetilde{r} = \begin{bmatrix} -0.001343 \\ -0.001572 \end{bmatrix}, \quad \widehat{r} = \begin{bmatrix} -0.0000001 \\ -0.0000000 \end{bmatrix}, \quad \widetilde{e} = \begin{bmatrix} -0.001 \\ -0.001 \end{bmatrix}, \quad \widehat{e} = \begin{bmatrix} -0.659 \\ -0.913 \end{bmatrix}.$$

Vi ser fra residualvektorene ($\widehat{r}$ og $\widetilde{r}$), at $\widehat{x}$ ser ut til å være den beste approksimasjonen til den eksakte løsningen x.

Kondisjonstallet til matrisa målt i 2-normen ($\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^TA)}$) er

$$\kappa_2(A) = 2.1932 \cdot 10^6.$$

Problemet er altså dårlig kondisjonert, hvilket forklarer at feilvektoren $\widehat{e}$ er stor på tross av at residualvektoren $\widehat{r}$ er liten.

c) Med $n = 10$, $x = (1, \ldots, 1)^T$ (i Matlab):

```
» x=ones(10,1)
» A=hilb(10)
» b=A*x
» xt=A\ x
» feil =norm(x-xt,inf)
```

får vi `feil = 3.7952e-004`.

Kondisjonstallet beregnet med max-normen ($\|\cdot\|_\infty$) for $n \times n$ Hilbert-matriser, $n = 10$:

```
» cond(hilb(10),inf)
ans =
     3.5354e+013
```

For $n = 5,\ 15$ får vi

$$\begin{aligned}
&n = 5: && \|x-\tilde{x}\|_\infty = 1.99\cdot 10^{-12}, && \kappa(A)_\infty = 9.44\cdot 10^{5}\\
&n = 10: && \|x-\tilde{x}\|_\infty = 3.79\cdot 10^{-4}, && \kappa(A)_\infty = 3.53\cdot 10^{13}\\
&n = 15: && \|x-\tilde{x}\|_\infty = 6.73, && \kappa(A)_\infty = 8.03\cdot 10^{17},
\end{aligned}$$

og sammenhengen mellom feilen `feil` og kondisjonstallet framkommer tydelig.

Gjentar vi eksperimentet på en tilfeldig matrise (`A = rand(n)`) gir (dine resultater ser kanskje annerledes ut)

$$\begin{aligned}
&n = 5: && \|x-\tilde{x}\|_\infty = 9.44\cdot 10^{-15}, && \kappa(A)_\infty = 386\\
&n = 10: && \|x-\tilde{x}\|_\infty = 5.55\cdot 10^{-15}, && \kappa(A)_\infty = 351\\
&n = 15: && \|x-\tilde{x}\|_\infty = 4.00\cdot 10^{-15}, && \kappa(A)_\infty = 68.2.\\
&n = 100: && \|x-\tilde{x}\|_\infty = 1.09\cdot 10^{-13}, && \kappa(A)_\infty = 3.33\cdot 10^{3}\\
&n = 1000: && \|x-\tilde{x}\|_\infty = 6.00\cdot 10^{-11}, && \kappa(A)_\infty = 5.04\cdot 10^{5}.
\end{aligned}$$

Hilbertmatrisa har altså svært store kondisjonstall sammenlignet med en tilfeldig matrise. Likevel ser vi at kondisjonstallet for de store matrisene er større enn for de små.

Oppgave 2

Kapittel 8.2, problem 3–9:

8.2.3: d **8.2.4:** b **8.2.5:** e **8.2.6:** c **8.2.7:** b,d **8.2.8:** a **8.2.9:** e

Merk at fasiten i oppgave 8.2.9 er gal, og at svaralternativ d i oppgave 8.2.7 forutsetter at vi finner $\mathcal{G}$-matrisa.

(Vær også oppmerksom på at enkelte forfattere definerer betingelse 8.2.5.b som diagonaldominans, mens definisjonen 1 s. 283 kalles *streng diagonaldominans.*)

Oppgave 3

Vi ser på systemet

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 15 & -2 & -6 & 0 \\ -2 & 12 & -4 & -1 \\ -6 & -4 & 19 & -9 \\ 0 & -1 & -9 & 21 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 300 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{b}. \tag{1}$$

- Tilstrekkelige kriterier for konvergens er gitt i Teorem 2 og 3 i kapittel 8.2 i læreboka.

  Diagonaldominans, definert i boka som

$$|a_{ii}| > \sum_{j\neq i} |a_{ij}|,$$

er oppfylt for systemet bortsett fra for den tredje raden der vi har likhet. Vi kan altså *ikke* konkludere fra Teorem 2 at Jacobi og Gauss-Seidel vil konvergere.

Matrisen har åpenbart positiv diagonal og er symmetrisk. Hvis den i tillegg er positiv definitt, vil SOR (og dermed også Gauss-Seidel) konvergere (Teorem 3).

Definisjonen symmetrisk positiv definitt matrise (SPD) A er at $x^T Ax > 0$ for alle x og at $A = A^T$. En ekvivalent definisjon er at $A = A^T$ og at alle egenverdiene til A er positive. Vi kan enkelt sjekke i Matlab at dette er tilfelle for matrisen vi ser på (f.eks. med funksjonen `eig`).

Så langt vet vi at SOR (og Gauss Seidel) vil konvergere, men vi vet ikke om Jacobi vil konvergere.

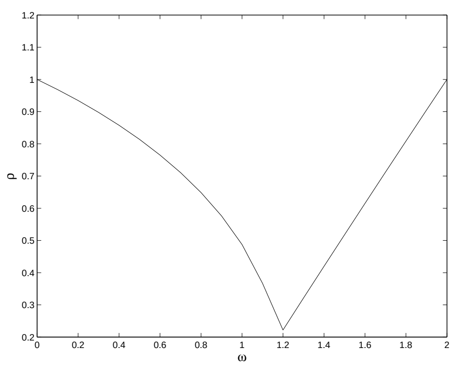
- Siden likningssystemet er lite og vi har Matlab tilgjengelig, kan vi beregne iterasjonsmatrisa $\mathcal{G}$ i hvert enkelt tilfelle. Vi har

$$\mathcal{G}_{JAC} = D^{-1}(C_U + C_L), \quad \mathcal{G}_{GS} = (D - C_L)^{-1} C_U, \quad \mathcal{G}_\omega = (D - \omega C_L)^{-1}(\omega C_U + (1-\omega)D).$$

Deretter bruker vi Teorem 1 i kapittel 8.2, og sjekker om spektralradien til iterasjonsmatrisa er mindre enn 1. Følgende Matlab-kode gjør jobben for oss:

```
>> A = [15,-2,-6,0;-2,12,-4,-1;-6,-4,19,-9;0,-1,-9,21];
>> CL = -tril(A,-1);
>> CU = -triu(A,1);
>> D = diag(diag(A));
>> Gjac = inv(D)*(CL+CU);
>> max(abs(eig(Gjac)))
ans = 0.6954
>> Ggs = inv(D-CL)*CU;
>> max(abs(eig(Ggs)))
ans = 0.4874
>> mega = [0:0.1:2];
>> rho = zeros(size(omega));
>> for i=1:length(omega)
>>    Gomega = inv(D-omega(i)*CL)*(omega(i)*CU+(1-omega(i))*D);
>>    rho(i) = max(abs(eig(Gomega)));
>> end
>> plot(omega,rho)
```

Siden $\mathcal{G}_{JAC} = 0.70 < 1$, $\mathcal{G}_{GS} = 0.49 < 1$ og $\mathcal{G}_\omega < 1$, som vi ser fra figuren (for ulike valg av ω), konkluderer vi med at alle metodene vil konvergere. Det ser også ut til at $\omega = 1.2$ vil gi raskest konvergens (sjekk det selv!).



- (Ikke i boka, men veldig nyttig.) Vi kan lette litt på kriteriene i Teorem 2, kapittel 8.2. Anta at systemet $Ax = b$ ikke kan dekomponeres i uavhengige undersystemer ved ombytte av likninger og variabler. Da vil både Jacobi og Gauss-Seidel konvergere hvis den svakere betingelsen

  $$|a_{ii}| \geq \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, \qquad i = 1, \cdots, n$$

  og

  $$|a_{kk}| > \sum_{j \neq k} |a_{kj}|, \qquad \text{for minst en verdi av } k,\ 1 \leq k \leq n$$

  er oppfylt. Hvis i tillegg $A = A^T$ og $a_{ii} > 0$, $i = 1, \cdots, n$, er A symmetrisk positiv definitt.

  Bruker vi dette, ser vi også at alle metodene vil konvergere.

Systemet (1) har løsning

$$x = \begin{bmatrix} 26.5492 \\ 9.3537 \\ 13.2550 \\ 6.1261 \end{bmatrix}.$$

Oppgave 4

Computer Problem 8.2.3:

Metode	Iter.	Løsning
Jacobi	77	$(-0.999962, 0.999956, -0.999999, 0.999954)$
Gauss-Seidel	38	$(-0.999957, 0.999954, -0.999992, 0.999957)$
SOR$_{\omega=1.4}$	12	$(-1.00003, 1.00002, -1.00001, 1.00000)$

Computer Problem 8.2.4: Et plot for ulike verdier av ω er gjengitt til høyre.