MA2501 Numeriske metoder

Vår 2009

Løsningsforslag øving 4.

Oppgave 1

b) Matrisen A's egenverdier og egenvektorer er gitt ved

$$
\begin{aligned}
\lambda_1 &= 18, \qquad v^{(1)} = [0, 1, 1]^T \\
\lambda_2 &= 6, \qquad v^{(2)} = [2, 1, -1] \\
\lambda_3 &= 3, \qquad v^{(3)} = [-1, 1, -1]
\end{aligned}
$$

slik at egenvektoren som korresponderer til den største egenvektoren har 0 som første element. Å velge $\varphi(x) = x_1$ (se s. 361) er dermed ikke et spesielt klokt valg. Velg heller $\varphi(x) = x_2$ for dette eksempelet. Et mer generelt valg er gitt i vedlagte kode.

Se nå på eksempelet med startverdi $x^{(0)} = [1, 0, 0] = v^{(2)} - v^{(3)}$. Så startverdien har ingen komponent av egenvektoren $v^{(1)}$ og potensmetoden konvergerer mot den nest største egenverdien λ_2 i stedet for λ_1. Men pga. avrundingsfeil vil en likevel få inn et liten komponent av $v^{(1)}$, som vokser og før eller siden vil dominere løsningen.

Oppgave 2

a) Kardinalfunksjonene er gitt ved

$$
\begin{aligned}
l_0(x) &= \frac{x-2}{0-2} \cdot \frac{x-3}{0-3} \cdot \frac{x-4}{0-4} = -\frac{1}{24}(x-2)(x-3)(x-4) \\
l_1(x) &= \frac{x-0}{2-0} \cdot \frac{x-3}{2-3} \cdot \frac{x-4}{2-4} = \frac{1}{4}x(x-3)(x-4) \\
l_2(x) &= \frac{x-0}{3-0} \cdot \frac{x-2}{3-2} \cdot \frac{x-4}{3-4} = -\frac{1}{3}x(x-2)(x-4) \\
l_3(x) &= \frac{x-0}{4-0} \cdot \frac{x-2}{4-2} \cdot \frac{x-3}{4-3} = \frac{1}{8}x(x-2)(x-3).
\end{aligned}
$$

Interpolasjonspolynomet blir:

$$
\begin{aligned}
p(x) = -\frac{7}{24}(x-2)(x-3)(x-4) &+ \frac{11}{4}x(x-3)(x-4) \\
&- \frac{28}{3}x(x-2)(x-4) + \frac{63}{8}x(x-2)(x-3).
\end{aligned}
$$

c) Teorem 1, s. 128 sier at det er et og bare et polynom av grad n eller mindre som interpolerer $n+1$ punkter. Men polynomet q er av grad 4.

d) Vi skal finne et polynom av grad 3 eller mindre som oppgyller

$$p(0) = 1, \quad p(1) = 0, \quad p'(0) = 0, \quad p'(-1) = -1 \tag{1}$$

Vi forsøker med et kubisk polynom

$$q(x) = ax^3 + bx + cx + d,$$

med derivert

$$q'(x) = 3ax^2 + 2bx + c.$$

De fire kravene (1) gir opphav til likningssystemet

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

som har løsning $a = -3/5, b = -2/5, c = 0, d = 1$. Polynomet

$$q(x) = -\frac{3}{5}x^3 - \frac{2}{5}x^2 + 1$$

tilfredsstiller altså kravene i oppgaven.

Oppgave 3

Vi løser oppgave 4.2.13 fra læreboka, og skal approksimere funksjonen $f(x) = \cos x$ med et interpolasjonspolynom $p_n(x)$ av grad n på $n+1$ ekvidistante (jevnt fordelte) noder i intervallet $[0, 1]$.

Vi skal begynne med å bestemme nøyaktigheten til approksimasjonen. Teorem 1 på side 156 i læreboka (C. og K.) gir for interpolasjonsfeilen

$$f(x) - p_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \tag{2}$$

der $x_0, \ldots, x_n$ er interpolasjonsnodene og $\xi \in [0, 1]$. Våre interpolasjonsnoder er ekvidistante, så med Lemma 1 på side 157 får vi

$$|f(x) - p_n(x)| \leq \frac{M}{4(n+1)}(\xi) \left(\frac{1}{n}\right)^{n+1}, \tag{3}$$

der $M = \max_{\zeta \in [0,1]} |f^{(n+1)}| = 1$ (for alle $n \geq 0$). Dermed har vi

$$|\cos x - p_n(x)| \leq \frac{1}{4(n+1)n^{n+1}}. \tag{4}$$

Oppgaven spør etter nøyaktigheten når $n = 9$. Innsatt i (4) får vi

$$|\cos x - p_9(x)| \leq \frac{1}{40 \cdot 9^{10}} \approx 0.72 \cdot 10^{-11} \tag{5}$$

for $x \in [0, 1]$.

Til sist skal vi bestemme for hvilke n likning (4) gir en feil mindre enn 10^{-7}. Vi vet at n kan velges mindre enn eller lik 9. Vi prøver oss med $n = 6$ og $n = 7$ og får

$$|\cos x - p_6(x)| \leq \frac{1}{28 \cdot 6^7} \approx 1.28 \cdot 10^{-7} \tag{6}$$

$$|\cos x - p_7(x)| \leq \frac{1}{32 \cdot 7^8} \approx 5.42 \cdot 10^{-9} < 10^{-7}. \tag{7}$$

Vi velger altså $n = 7$.

Oppgave 4

a) At $T_0(x) = 1$ og $T_1(x) = x$ ser vi ved innsetting. For $n > 1$ introduser $\theta = \arccos(x)$ slik at

$$T_n(\theta(x)) \equiv T_n(\theta) = \cos(n\theta), \qquad \text{med} \quad \theta \in [0, \pi]\,.$$

Det gir

$$\begin{aligned} T_{n+1}(\theta) &= \cos(n\theta)\cos(\theta) - \sin(n\theta)\sin(\theta) \\ T_{n-1}(\theta) &= \cos(n\theta)\cos(\theta) + \sin(n\theta)\sin(\theta) \end{aligned}$$

slik at

$$T_{n+1}(\theta) = 2\cos(n\theta)\cos(\theta) - T_{n-1}(\theta)$$

eller

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x).$$

b) Plottingen kan gjøres rett frem som beskrevet i oppgaveteksten, men hva er det egentlig vi observerer?

Vi husker at uttrykket for interpolasjonsfeilen kan skrives som

$$f(x) - p_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \underbrace{\prod_{i=0}^{n} (x - x_i)}_{=w_n(x)},$$

når f er $n+1$ ganger deriverbar på intervallet $[a, b]$ og $x, \xi \in [a, b]$. Dermed har vi

$$|f(x) - p_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} \left(\max_{t \in [a,b]} |w_n(t)| \right)$$

der $M = \max_{\xi \in [a,b]} |f^{(n+1)}(\xi)|$. For en generell funksjon $f(x)$ vil vi ikke kunne kontrollere M. Imidlertid ser vi at valget av interpolasjonsnoder også har en innvirkning på feilen, og vi ønsker å velge nodene slik at $\max_{t \in [a,b]} |w_n(t)|$ minimeres.

n	$x_i = \cos\left(\frac{2i+1}{2n+2}\pi\right)$	$x_i = \cos\left(\frac{i\pi}{n}\right)$	$x_i = -1 + \frac{2i}{n}$
5	3.125E − 2	6.250E − 2	6.923E − 2
10	9.766E − 4	1.929E − 3	8.532E − 3
15	3.052E − 5	6.104E − 5	1.346E − 3
20	9.537E − 7	1.902E − 6	2.337E − 4
25	2.980E − 8	5.961E − 8	4.272E − 5
30	9.313E − 10	1.860E − 9	8.064E − 6
35	2.910E − 11	5.821E − 11	1.556E − 6
40	9.095E − 13	1.818E − 12	3.048E − 7

Tabell 1: $\max_{t\in[-1,1]} |w_n(t)|$ for ulike verdier av n og ulike valg av interpolasjonsnoder

Tabell 1 viser $\max_{t\in[a,b]} |w_n(t)|$ for ulike verdier av n for de tre valgene av interpolasjonsnoder som var foreslått i oppgaven. Vi ser at Chebychev-nodene gir best resultater, og dermed lavest interpolasjonsfeil. Vi ser også at de tilnærmede Chebychev-nodene $\cos(i\pi/n)$ gir gode resultater. Interpolasjonsfeilen blir dermed ikke dramatisk mye større dersom vi ikke treffer Chebychev-nodene eksakt.

De ekvidistante punktene gir langt større maksimalverdi, og dermed større interpolasjonsfeil, enn de to foregående valgene. Spesielt blir dette tydelig for store n.

Konklusjonen er at vi bør velge Chebychev-noder eller tilnærmede Chebychev-noder dersom vi står fritt til å velge interpolasjonsodene.