MA2501 Numeriske metoder

Vår 2009

Løsningsforslag øving 1

Oppgave 1

Vi ser at bare integralet i telleren krever en tilnærmet løsning (integralet i nevneren løser vi enkelt analytisk).

Til å aproksimere integralet $\int_{r_e}^{r_0} T(r)r\Theta_p \,\mathrm{d}r$ bruker vi trapesmetoden. I Matlab kan dette gjøres ved hjelp av den innebygde funksjonen `trapz`.

Med $\theta = 0.7051$ og oppgitte verdier for r, $T(r)$ og integrasjonsgrensene, finner vi (vi regner dimensjonsløst)

$$\int_{r_e}^{r_0} T(r)r\Theta_p \,\mathrm{d}r \approx 24971.25$$

og dermed

$$T \approx \frac{24971.25}{\frac{0.7051}{2}(14.58^2 - 9.38^3)} = 568.5.$$

Oppgave 2

a) Vi skal approksimere integralet

$$\int_{0.0}^{0.8} f(x)\,\mathrm{d}x$$

når vi kjenner $f(x) = e^{-x^2}$ i punktene $x_0 = 0.0, x_1 = 0.2, x_2 = 0.4, x_3 = 0.6$ og $x_4 = 0.8$.

i) Med trapesformelen får vi

$$\int_{0.0}^{0.8} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{3}(x_{i+1} - x_i)\big(f(x_i) + f(x_{i+1})\big) = 0.6548511\ldots$$

ii) Vi har $n = 4$ intervaller av lengde $h = 0.2$, og bruker Simpsons komposittformel (side 220 i læreboka). Vi får

$$\begin{aligned}\int_{0.0}^{0.8} f(x)\,\mathrm{d}x &\approx \frac{h}{3}\Big(\big(f(x_0) + f(x_4)\big) + 4\big(f(x_1) + f(x_3)\big) + 2\big(f(x_2)\big)\Big) \\ &= 0.6576962\ldots\end{aligned}$$

iii) Vi bygger Rombergtabellen

$$\begin{array}{lll} R(0,0) & & \\ R(1,0) & R(1,1) & \\ R(2,0) & R(2,1) & R(2,2). \end{array}$$

Den første kolonnen finner vi direkte med trapesmetoden, mens den andre og tredje kolonnen er gitt ved formelen

$$R(n,m) = R(n,m-1) + \frac{1}{4^m - 1}\big(R(n,m-1) - R(n-1,m-1)\big)$$

(se læreboka side 205). Vi får

$$\begin{array}{lll} 0.610916969617219 & & \\ 0.646316000395094 & 0.658115677321052 & \\ 0.654851153242218 & 0.657696204191259 & \underline{0.657556379814662}, \end{array}$$

der den beste tilnærmingen til integralet er streket under.

b) Vi skal undersøke hvor mange intervaller som kreves for at feilen skal bli mindre enn $0.5 \cdot 10^{-5}$ når vi benytter trapesmetoden.

Siden intervallengden er konstant og $f \in C^2[0, 0.8]$, kan vi benytte Teorem 1 på side 192 i læreboka, som sier at feilen e vi gjør ved approksimasjonen er gitt som $e = -\frac{1}{12}(0.8 - 0)h^2 f''(\xi)$ for $\xi \in (0, 0.8)$. Vi har $f''(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2}$, og dermed

$$|f''(\xi)| \leq 2 + 4 \cdot 0.8^2 = 4.56, \quad \forall \xi \in [0, 0.8],$$

så dermed får vi

$$|e| \leq \frac{0.8}{12} h^2 4.56 = 0.304h^2. \tag{1}$$

For $|e| \leq 0.5 \cdot 10^{-5}$, må $h \leq 0.004055$, eller $n = 198$ subintervaller på $[0, 0.8]$.

Oppgave 3

Se løsningsforslagene til eksamensoppgavene.

Oppgave 4

Se `romberg.m`