MA2501 Numeriske metoder

Vår 2009

Løsningsforslag øving 7

Oppgave 1

La $T_1 = T(a,b) = (b-a)(f(a)+f(b))/2$, og $T_2 = T(a,c) + T(c,b)$, der $c = (a+b)/2$. Vi vet at

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = T_1 - \frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi_1)$$
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = T_2 - \frac{(b-a)^3}{12 \cdot 2^3} \left(f''(\eta_1) + f''(\eta_2)\right).$$

der $\xi_1 \in (a,b)$, $\eta_1 \in (a,c)$ og $\eta_2 \in (c,b)$. Antar vi at $f''(x)$ endrer seg lite over intervallet (a,b), kan vi bruke samme argumentasjon som for adaptive Simpson, dvs. et passende feilestimat for T_2 er

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - T_2 \approx \mathcal{E}(a,b) = \frac{1}{3}(T_2 - T_1).$$

Adaptiv trapes blir da:

function result = trap(f, a, b,tol)

Regn ut T_1, T_2 og $\mathcal{E}(a,b)$.

if $|\mathcal{E}(a,b)| \le tol$

result $= T_2 + \frac{1}{3}(T_2 - T_1)$.

else

$c = (a+b)/2$

$T_l = \text{trap}(f, a, c, tol/2)$

$T_r = \text{trap}(f, c, b.tol/2)$

result $= T_l + T_r$.

end

Oppgave 2

a) Vi får: $P_3 = 5x^3/2 - 3x/2$, og de 2 ekstra nodene blir $x_{1,2} = \pm\sqrt{5}/5$. De 4 kardinalfunksjonene blir

$$l_0(x) = \frac{1}{8}(-5x^3 + 5x^2 + x - 1), \qquad l_2(x) = \frac{5}{8}(\sqrt{5}x^3 - x^2 - \sqrt{5}x + 1)$$
$$l_3(x) = \frac{5}{8}(-\sqrt{5}x^3 - x^2 + \sqrt{5}x + 1), \qquad l_4(x) = \frac{1}{8}(5x^3 - x^2 + 5x - 1)2$$

Kvadraturformelen er gitt ved:

$$Q(f,-1,1) = \frac{1}{6}\left(f(-1) + 5f\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right) + 5f\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right) + f(1)\right).$$

Metoden har presisjonsgrad 5.

b) Feilformelen i oppgaveteksten er feil. Den skal være

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = Q(f,-1,1) - \frac{2}{23625} f^{(6)}(\xi).$$

I så fall blir

$$\int_{t_j}^{t_{j+h}} f(t)dt = \frac{h}{12}\left(f(t_j) + 5f(t_j + c_1 h) + 5f(t_j + c_2 h) + f(t_j + h)\right) - \frac{2}{2^7 \cdot 23625} h^7 f^{(6)}(\xi_i),$$

med $c_1 = (5-\sqrt{5})/10)$, $c_2 = (5+\sqrt{5})/10$, og den sammensatte formelen blir til sist:

$$\int_a^b f(t)dt = \frac{h}{12}\left(f(a) + 5\sum_{j=0}^{m-1}(f(t_j + c_1 h) + f(t_j + c_2 h)) + 2\sum_{j=1}^{m-1} f(t_j)\right) - \frac{b-a}{1512000} h^6 f^{(6)}(\eta)$$

der $\eta \in (a,b)$.

c) Tilnærmelsen til integralet blir 0.6931480992. Det eksakte integralet er $\ln(2) = 0.6931471806$. Feilen er dermed $-9.2 \cdot 10^{-7}$.

Med $f(t) = 1/(1+t)$ har vi at $f^{(6)}(t) = 720/(1+t)^7$, som har 720 som sin maksimale verdi. Med $h = 0.5$ blir dermed en øvre grense for feilen (i absoluttverdi) $7.4 \cdot 10^6$.