MA2501 Numeriske metoder

Vår 2009

Løsningsforslag øving 8

Oppgave 2

Vi har

$$\begin{array}{llcllll} \text{Eksakt løsning:} & y(t_{n+1}) & = y(t_n) & + & h\Phi(t_n, y(t_n); h) & + & d_{n+1}, \\ \text{Numerisk løsning:} & y_{n+1} & = y_n & + & h\Phi(t_n, y_n; h). & & \end{array}$$

Ta differensen mellom disse, og bruk at den globale feilen i skritt n er gitt ved $e_n = y(t_n) - y_n$:

$$e_{n+1} = e_n + h\left(\Phi(t_n, y(t_n); h) - \Phi(t_n, y_n; h)\right) + d_{n+1}.$$

Ta normen på begge sider:

$$\|e_{n+1}\| = \|e_n + h\left(\Phi(t_n, y(t_n); h) - \Phi(t_n, y_n; h)\right) + d_{n+1}\| \leq \|e_n\| + h\|\Phi(t_n, y(t_n); h) - \Phi(t_n, y_n; h)\| + \|d_{n+1}\|$$

Bruk deretter antagelsene som er gitt i oppgaven:

$$\|e_{n+1}| \leq \|e_n\| + hM\|y(t_n) - y_n\| + Dh^{p+1} = (1 + hM)\|e_n\| + Dh^{p+1}.$$

Forutsatt at $y(t_0) = y_0$ har vi nå at

$$\|e_1\| \leq Dh^{p+1}, \quad \|e_2\| \leq (1 + hM)Dh^{p+1} + Dh^{p+1}, \cdots, \|e_n\| \leq \left(\sum_{i=0}^{n-1} (1 + hM)^i\right) Dh^{p+1}, \cdots$$

slik at

$$\|e_{Nstep} \leq \left(\sum_{n=0}^{Nstep-1} (1 + hM)^n\right) Dh^{p+1} = \frac{(1 + hM)^{Nstep} - 1}{1 + hM - 1} Dh^{p+1} = \frac{(1 + hM)^{Nstep} - 1}{M} Dh^p.$$

Bruk det faktum at $e^x \geq 1 + x$ for $x \geq 0$, slik at

$$\|e_{Nstep}\| \leq \frac{e^{M \cdot h \cdot Nstep} - 1}{M} Dh^p = \frac{e^{M(t_{end} - t_0)} - 1}{M} Dh^p = Ch^p.$$

Dette argumentet er gyldig uavhengig av hvilken norm som blir valgt.

Oppgave 3

Ligningen $y' = y$, $y(0) = y_0$ har løsningen $y(t) = e^t y_0$. Løsningen etter et skritt h er

$$y(h) = e^h y_0 = \left(1 + h + \frac{h^2}{2!} + \frac{h^3}{3!} + \cdots\right) y_0 = \left(\sum_{p=0}^{\infty} \frac{h^p}{p!}\right) y_0$$

En eksplisitt s-nivå Runge-Kutta metode for dette problemet er gitt ved

$$\begin{aligned}
k_1 &= y_0 \\
k_2 &= y_0 + ha_{21}k_1 = (1 + ha_{21})y_0 \\
k_3 &= y_0 + ha_{31}k_1 + ha_{32}k_2 = (1 + h(a_{31} + a32) + h^2 a_{31}a_{21})y_0 \\
&\vdots \\
k_s &= y_0 + h\sum_{j=1}^{s-1} a_{sj}k_j \\
y_1 &= y_0 + h\sum_{i=1}^{s} b_i k_i
\end{aligned}$$

Vi ser at k_i er et polynom av grad $i - 1$ i h, og dermed er y_1 et polynom av grad s. Metoden kan altså maksimalt være av orden s.

Kommentar: Det fins metoder av orden s for $s \leq 4$ (det har vi allerede sett). Men for å finne en eksplisitt metode av orden 5 trengs $s \geq 6$.

Oppgave 4

Les notatet om adaptive metoder.

Bogacki-Shampines metode er gitt ved:

$$\begin{array}{c|ccccl}
0 & & & & & \\
1/2 & 1/2 & & & & \\
3/4 & 0 & 3/4 & & & \\
1 & 2/9 & 1/3 & 4/9 & & \\
\hline
 & 2/9 & 1/3 & 4/9 & 0 & \text{(orden 3)} \\
\hline
 & 7/24 & 1/4 & 1/3 & 1/8 & \text{(orden 2)}
\end{array}$$

Sjekk metodenes orden selv.

Vi bruker den 3.ordens metoden til å avansere løsningen (lokal ekstrapolasjon). Legg merke til at $b_i = a_{4i}$, noe som betyr at k_4 for et skritt er det samme som k_1 for det neste. Selv om metoden har 4 nivåer trengs bare 3 funksjonsberegninger pr. skritt (med unntak av det første). Denne egenskapen kalles FSAL (First Same As Last).