MA2501 Numeriske metoder

Vår 2009

Løsningsforslag øving 1

Oppgave 1

Ved å skrive $y_1 = x$ og $y_2 = x'$, kan det oppgitte problemet skrives

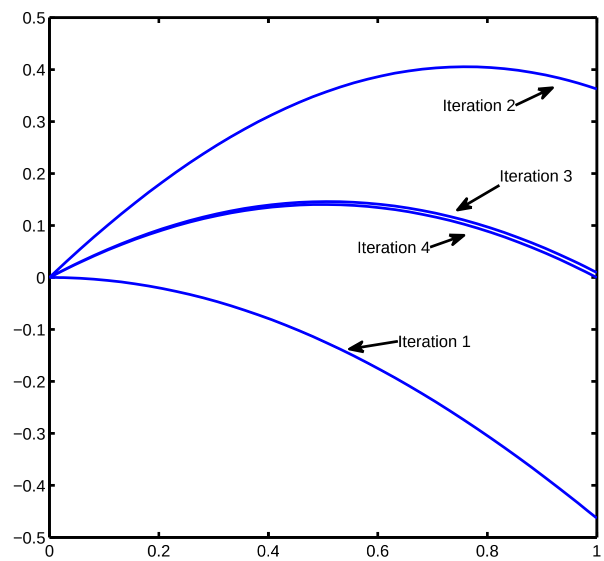
$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= -e^{y_1}, \end{aligned} \tag{1}$$

med $x(0) = x(1) = 0$.

Vi begynner med å lage oss en funksjon `opg1_fun.m` som svarer til systemet over. Merk at funksjonen må ta inn to argumenter, t og y.

```
function [f] = opg1_fun(t,y)
% ODE function for use with matlab (skyt.m or built-in ODE solver)

f = zeros(2,1); %f må være en kolonnevektor
f(1) = y(2);
f(2) = -exp(y(1));
```



Kommandoen `[t x] = skyt(@opg1_fun,0,1,0,0,0,1)` vil da kjøre programmet med de oppgitte betingelsene, og startverdiene $x_0 = 0$, $x_1 = 1$. Løsningen ved hver av de fire første iterasjonene er vist i figuren over. Ved fjerde iterasjon klarer vi ikke lenger å skille løsningene fra hverandre (visuelt).

Oppgave 2

Vi er gitt

$$x'' = -2t(x')^2, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = z, \tag{2}$$

og skal først finne $\phi(z) = x(1)$.

Setter vi $\psi = x'$ ser vi at likningen over kan skrives

$$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} = -2t\psi^2, \tag{3}$$

som er en separabel førsteordens differensiallikning med løsning

$$\big(x'(t) =\big) \quad \psi(t) = \frac{1}{t^2 + K_1}, \tag{4}$$

der K_1 er en integrasjonskonstant.

Vi antar $K_1 \geq 0$ og bruker variabelskiftet $\tau = \frac{t}{\sqrt{K_1}}$. Da får vi

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{K_1}} \arctan(t) + K_2. \tag{5}$$

Med startverdiene gitt i oppgaven får vi $K_1 = z$ og $K_2 = 1$, og dermed

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{z}} \arctan(t) + 1. \tag{6}$$

Siden $x(t)$ løser startverdiproblemet konkluderer vi med at antakelsen $K_1 \geq 0$ var korrekt.

Spesielt finner vi

$$\phi(z) = x(1) = \frac{\pi}{4\sqrt{z}} + 1. \tag{7}$$

Vi skal nå løse randverdiproblemet

$$x'' = -2t(x')^2, \quad x(0) = 1, \quad x(1) = 1 + \frac{\pi}{4}. \tag{8}$$

Vi vet at differensiallikningen og den venstre randbetingelsen er oppfyllt med løsningen (6) av startverdiproblemet. Samtidig ser vi at med $z = 1$ i (7), er også betingelsen $x(1) = 1 + \pi/4$ oppfyllt, og randverdiproblemet har dermed løsning

$$x(t) = \arctan(t) + 1. \tag{9}$$

Oppgave 4

a) La $x_i = ih$. Vi bruker differanseapproksimasjonene

$$u_{xx}(x_i, x_j) \approx \frac{1}{h^2}(u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j})$$

and

$$u_{yy}(x_i, x_j) \approx \frac{1}{h^2}(u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1})\ ,$$

til de dobbeltderiverte, og får

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h^2}(1 - 2u_{11} + u_{21}) + \frac{1}{h^2}(1 - 2u_{11} + u_{12}) &= -1 \\
\frac{1}{h^2}(u_{11} - 2u_{21} + 1) + \frac{1}{h^2}(1 - 2u_{21} + 1) &= -1 \\
\frac{1}{h^2}(1 - 2u_{12} + 1) + \frac{1}{h^2}(u_{11} - 2u_{12} + 1) &= -1.
\end{aligned}$$

Med $h = 1/4$ finner vi vi likningene

$$\begin{aligned}
-4u_{11} + u_{21} + u_{12} &= -33/16 = -2.0625 \\
u_{11} - 4u_{21} &= -49/16 = -3.0625 \\
u_{11} - 4u_{12} &= -49/16 = -3.0625.
\end{aligned}$$

b) Med A, $\vec{u}$ og $\vec{b}$ gitt ved

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{21} \\ u_{12} \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -33/16 \\ -49/16 \\ -49/16 \end{pmatrix},$$

finner vi $u_{11} = 1.0268$ og $u_{12} = u_{21} = 1.0223$.

Oppgave 5

Vi kan bruke Newtons metode for å løse systemer av ikkelineære likninger på formen

$$\vec{f}(\vec{u}_{j+1}) = 0, \tag{10}$$

der $\vec{u}_{j+1}$ er en vektor med ukjente. Vi antar at løsningen for for t_j er kjent, slik at $\vec{u}_{i,j}$ er kjent mens $u_{i,j+1}$ er ukjent for $1 \leq i \leq n-1$. Fra de oppgitte randverdiene, vet vi at $u_{0,j+1} = u_{n,j+1} = 0$. Vi har altså

$$\vec{u}_{j+1} = (u_{1,j+1}, u_{2,j+1}, \cdots, u_{n-1,j+1})^{\mathrm{T}}, \tag{11}$$

og element nummer i i vektoren $\vec{f} = 0$ kan skrives

$$\begin{aligned}
f_i(\vec{x}) &= f_i(u_{1,j+1}, u_{2,j+1}, \cdots, u_{n-1,j+1}) \\
&= \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} + \frac{u_{i+1,j+1}^2 - u_{i-1,j+1}^2}{4h} - \mu\frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}}{h^2} = 0
\end{aligned} \tag{12}$$

for $i = 1, 2, \cdots, n-1$.

Newtons metode, med stoppkriteriet $\sqrt{\sum_{i=1}^{n-1} (\Delta\vec{u})_i^2} \leq 10^{-4}$, for likning (10) kan skrives

La $u_{i,j+1}^{(0)} = u_{i,j}$, $i = 1, 2, \cdots, n-1$.
for $l = 1, 2, \ldots$

Løs $J^{(l)}\Delta\vec{u} = -\vec{f}(\vec{u}_{j+1}^{(l)})$ med hensyn på $\Delta\vec{u}$.

La $\vec{u}_{j+1}^{l+1} = \vec{u}_{j+1}^{l} + \Delta\vec{u}$

Stopp hvis $\sqrt{\sum_{i=1}^{n-1} (\Delta\vec{u})_i^2} \leq 10^{-4}$.

end

I Matlab bruker vi kommandoen `norm(v,2)` for å beregne $\sqrt{\sum_{i=1}^{n-1} v_i^2}$.

Elementet J_{mn} i Jacobimatrisen J er gitt ved

$$\frac{\partial f_m}{\partial u_{n,j+1}}$$

og hele matrisen er eksplisitt gitt ved

$$J = \begin{pmatrix} \frac{1}{k} + \frac{2\mu}{h^2} & \frac{u_{2,j+1}}{2h} - \frac{\mu}{h^2} & & & & \\ -\frac{u_{1,j+1}}{2h} - \frac{\mu}{h^2} & \frac{1}{k} + \frac{2\mu}{h^2} & \frac{u_{3,j+1}}{2h} - \frac{\mu}{h^2} & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -\frac{u_{2,j+1}}{2h} - \frac{\mu}{h^2} & \frac{1}{k} + \frac{2\mu}{h^2} & \frac{u_{n-1,j+1}}{2h} - \frac{\mu}{h^2} \\ & & & & -\frac{u_{n-2,j+1}}{2h} - \frac{\mu}{h^2} & \frac{1}{k} + \frac{2\mu}{h^2} \end{pmatrix} \tag{13}$$

Vi har nå et eksplisitt uttrykk for det ikkelineære likningssystemet, gitt ved (12), og for Jacobimatrisen (13). Det eneste som gjenstår er å konstruere J og vektorfunksjonen $\vec{f}$ i Matlab (husk her at indeksene i matlab starter på 1, ikke på 0 som i liknignene over).

```
J = zeros(n-2,n-2);
f = zeros(n-2,1);
for ii = 1:n-3
    J(ii,ii) = 1/k+2*mu/h^2;
    J(ii,ii+1) = u(ii+2,j+1)/(2*h)-mu/h^2;
    J(ii+1,ii) = -u(ii+1,j+1)/(2*h)-mu/h^2;
    f(ii) = (u(ii+1,j+1)-u(ii+1,j))/k + ...
        (u(ii+2,j+1)^2-u(ii,j+1)^2)/(4*h)- ...
```

```
        mu*(u(ii+2,j+1)-2*u(ii+1,j+1)+u(ii,j+1))/h^2;
end
J(n-2,n-2) = 1/k+2*mu/h^2;
f(n-2) = (u(n-1,j+1)-u(n-1,j))/k + ...
        (u(n,j+1)^2-u(n-2,j+1)^2)/(4*h) - ...
        mu*(u(n,j+1)-2*u(n-1,j+1)+u(n-2,j+1))/h^2;
du = -J\f;
u(2:n-1,j+1) = u(2:n-1,j+1)+du;
```

Med denne koden insatt i Matlab-koden som ble gitt sammen med øvingsoppgaven, får vi en løsning som på figuren under (skrittlengden for x er valgt til $h = 0.005$.