# MA2501 Numeriske metoder

Vår 2009

**Øving 1**

De to første oppgavene inneholder litt MATLAB kode. Bruk `help` eller `helpdesk` for en forklaring på de ulike elementene i koden. Selv om det virker opplagt nok, kan hjelpeteksten gi dere ekstra informasjon som kan være nyttig senere.

Husk at det ofte er mer enn en måte å gjøre ting på i MATLAB.

## Oppgave 1

Gitt ligningen $f(x) = e^x + x^2 - x - 4 = 0$.

**a)** Vis (teoretisk) at $f$ har et og bare et nullpunkt $r$ på intervallet $[1, 2]$.

Plott deretter $f(x)$, $x \in [1, 2]$ i MATLAB, og finn en tilnærmelse til $r$ grafisk. Dette kan du f.eks. gjøre ved å skrive

```
f = inline('exp(x)+x^2-x-4');
fplot(f,[1,2])
grid on
```

Finn en tilnærmelse til $r$ ved bruk av Newtons metode. Bruk $x_0 = 1.5$ som startverdi. (Bruk gjerne kalkulator i stedet for MATLAB.)

**b)** Ligningen $f(x) = 0$ kan skrives om på formen $x = g(x)$ med f.eks.

$$
\begin{array}{ll}
i) & g(x) = \ln(4 + x - x^2) \\
ii) & g(x) = \sqrt{-e^x + x + 4} \\
iii) & g(x) = e^x + x^2 - 4
\end{array}
$$

For hver av disse kan vi lage et fikspunkt iterasjonsskjema $x_{n+1} = g(x_n)$.
MATLAB koden blir f.eks.

```
g = inline('log(4+x-x^2)');
x = 1.5           % Startverdi
Nit = 10          % Antall iterasjoner
for n=1:Nit
  x = g(x)
end
```

Test de tre skjemaene numerisk, og se hvilke som konvergerer og hvilke som ikke gjør det. Bruk $x_0 = 1.5$, men eksperimenter gjerne med andre startverdier. Bruk Teorem 1 i notatet om fikspunktiterasjoner for å bekrefte de numeriske resultatene.

**Hint:** Om nødvendig, velg et annet intervall $[a, b]$ som inneholder $r$. Bruk gjerne MATLAB for å plotte $g(x)$ og $g'(x)$.

For de(t) skjemaene som kovergerer, estimer det maksimale antall iterasjoner som er nødvendig for å beregne $r$ med en nøyaktighet på $10^{-6}$. Kontroller svaret numerisk. (Svaret avhenger av intervallet du velger. Det fins altså intet fasitsvar på oppgaven.).

**Oppgave 2**

Halveringsmetoden er beskrevet i kap. 3.1 i C&K. Ideen er enkel: gitt en $f \in C[a,b]$. Hvis $f(a)f(b) < 0$ har $f$ (minst) et nullpunkt (rot) i $[a,b]$. I så fall deles intervallet i 2 like deler, og vi sjekker hvilket delintervall som har et nullpunkt. Dette halveres, osv. Denne algoritmen konvergerer for alle $f \in C[a,b]$ når $f(a)f(b) < 0$.

Algoritmen kan beskrives ved følgende pseudokode:

Gitt $f$, $a$, $b$ og $N_{max}$ (antall iterasjoner).
**for** $n = 1, 2, 3, \cdots, N_{max}$
    $x \leftarrow (a+b)/2$
    **if** $f(a)f(x) < 0$
        $b \leftarrow x$
    **else**
        $a \leftarrow x$
    **end**
**end**

**a)** Implementer algoritmen som en funksjon i MATLAB. Test programmet på ligningen i oppgave 1.

Estimer det maksimale antall iterasjoner som er nødvendig for å beregne $r$ med en nøyaktighet på $10^{-6}$.

**b)** Legg inn tester som stopper iterasjonene når resultater er tilstrekkelig nøyaktig. De to mest aktuelle testene er

- $b - x < \varepsilon_x$
- $|f(x)| < \varepsilon_f$

der $\varepsilon_x$ og $\varepsilon_f$ er gitte toleranser.

**Oppgave 3**

La $p$ være et positivt tall. Hva er verdien av følgende uttrykk:

$$x = \sqrt{p + \sqrt{p + \sqrt{p + \cdots}}}$$

**Hint:** Leg merke til at dette kan skrives som en fikspunkt-iterasjon.

**Oppgave 4**

Oppgave 3.2.33, s. 103 og 3.3.12, s. 122. i læreboka.