

MA2501 Numeriske metoder

Vår 2009

Øving 3.

Oppgave 1

Ligningssystemene $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har \mathbf{x} som riktig løsning og $\tilde{\mathbf{x}}$ som en tilnærmet løsning.

- a) Se side 254 (kapittel 7.1) og side 321 (kapittel 8.2) i C&K. Vis at

$$\frac{\|\mathbf{e}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \kappa(A) \frac{\|\mathbf{r}\|}{\|\mathbf{b}\|}$$

der $\mathbf{e} = \mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}$ og $\mathbf{r} = A\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{b}$.

- b) Kap. 7.1, problem 5. Regn også ut kondisjonstallet til matrisa, og vis at ulikheten fra punkt a) stemmer.
- c) (MATLAB) Formålet med denne oppgaven er å demonstrere at avrundingsfeil kan utgjøre et alvorlig problem for løsningen av et ligningssystem dersom koeffisientmatrisa er dårlig kondisjonert.

Hilbertmatrisa er ei $n \times n$ matrise med elementer $a_{ij} = 1/(i + j - 1)$. La nå A være ei $n \times n$ Hilbertmatrise, \mathbf{x} er en vektor av lengde n som du for øvrig velger selv, og la $\mathbf{b} = A\mathbf{x}$. Dermed har du et ligningssystem der du kjenner den eksakte løsningen. Løs så systemet i MATLAB, noe som gir deg en *tilnærmet* løsning $\tilde{\mathbf{x}}$. Hvor stor er feilvektoren og residualfeilen, målt i max-norm? Finn også kondisjonstallet til matrisa.

Prøv dette for $n = 5$, $n = 10$ og $n = 15$.

Gjenta eksperimentet med en vilkårlig matrise.

Noen nyttige MATLAB-kommandoer:

`hilb(n)`: Lager en $n \times n$ Hilbert matrise.

`norm(x,inf)`: Regner ut max-normen til en vektor.

`cond(A,inf)`: Regner ut kondisjonstallet til A , ved bruk av max-normen.

Oppgave 2

Kap. 8.2, problemene 3-9.

(NB! Ikke se på fasiten på oppgave 9, den er gal).

Oppgave 3

Gitt ligningssystemet på s. 245 (forsiden på kapittel 7) i C&K. Dersom du prøver å løse dette med Jacobi, Gauss-Seidel, eller SOR ($0 < \omega < 2$), vil da iterasjonene konvergere? Begrunn svaret.

Oppgave 4

Kap. 8.2, computer problem 3 og 4.