MA2501 Numeriske metoder

Vår 2009

Øving 4.

Oppgave 1

a) Bruk MATLAB-rutina `potens.m` for å finne største egenverdi og tilhørende egenvektor til matrisa:

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 & 3 \\ -10 & -1 & 6 \\ 10 & -2 & -9 \end{bmatrix}.$$

Bruk $x^{(0)} = [1, 0, 0]^T$ som startverdi. Kontroller svaret med MATLABs `eig`.

b) Gjenta eksperimentet i punkt **a)** med matrisa

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 1 & 11 & 7 \\ -1 & 7 & 11 \end{bmatrix}$$

og med $x^{(0)} = [1, 1, 1]$ som startverdi. Dette kommer antagelig til å gå galt. Hvorfor, og se om du kan rette feilen. Når alt virker, gjenta med startverdi $x^{(0)} = [1, 0, 0]$. Hva er svaret etter ca. 20 iterasjoner, og hva er det etter 50? Forklar.

c) Skriv om `potens.m` slik at den bruker (forskjøvet) invers potensmetode for å finne egenverdier. Bruk den til å løse problem 8.4.4, s. 369. Kontroller svarene.

Oppgave 2

a) Finn Lagrangeformen av interpolasjonspolynomet av lavest mulig grad som interpolerer tabellen

x	0	2	3	4
y	7	11	28	63

b) Finn og plott kardinalfunksjonene $l_i(x)$ basert på interpolasjonsnodene $-1, 1, 3$ og 4.

c) Verifiser at polynomene

$$p(x) = 5x^3 - 27x^2 + 45x - 21, \qquad (1)$$
$$q(x) = x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 3 \qquad (2)$$

begge interpolerer punktene gitt i tabellen

x	1	2	3	4
$f(x)$	2	1	6	47

Hvorfor motsier ikke dette entydighetsteoremet?

d) Løs oppgave 4.1.27 på side 149 i læreboka.

Oppgave 3

Oppgave 4.2.13 på s. 162 i læreboka.

Oppgave 4

a) Vis at funksjonene $T_n(x)$, definert på intervallet $[-1, 1]$ ved

$$T_n(x) = \cos(n \cdot \arccos(x)), \qquad \text{for } n = 0, 1, 2,$$

er polynomer av grad n som oppfyller rekursjonsformelen

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x).$$

Dette er *Chebyshev-polynomene.*

b) Plott funksjonen

$$w_n(t) = \prod_{i=0}^{n} (t - x_i) \tag{3}$$

for $t \in [-1, 1]$ for hvert av de tre tilfellene

1. $x_i = \cos\big((2i + 1)\pi/(2n + 1)\big)$ – *(Chebyshev-noder),*
2. $x_i = \cos(i\pi/n)$,
3. $x_i = -1 + 2i/n$,

der $i = 0, 1, \ldots, n$. Bruk gjerne den vedlagte Matlab funksjonen `m` (ligger på øvingssiden på fagets hjemmeside som `w.m`). I så fall kan du for $n = 3$ plotte $w_n(t)$ basert på Chebychev-nodene som følger

```
n = 3
i = 0:n
x = cos((2*i + 1)*pi / (2*n + 2))
[t, y] = w(x, [-1,1])
plot(t,y,'b-','LineWidth','2')
grid on
```

c) Løs "Computer Problem" 4.2.1 og 4.2.2 på side 163 i læreboka ved hjelp av Matlabs funksjoner `polyfit` og `polyval`. Lag plott av funksjonene.

I oppgavene i boken brukes 21 noder. Gjør de samme eksperimentene med 6 og 11 noder også.