# MA2501 Numeriske metoder

Vår 2009

## Øving 7.

### Oppgave 1

Konstruer og implementer en adaptiv trapes metode.

### Oppgave 2

Først en kort oppsummering av et par ting som ble gjennomgått i forelesningen, men som ikke står i læreboka.

En kvadraturformel er vanligvis gitt på formen

$$Q(f; a, b) = \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$$

hvor nodene $x_i \in [a, b]$. Kvadraturformelen er av *presisjonsgrad* $m$ dersom

$$\int_a^b p(x)dx = Q(p; a, b), \qquad \text{for alle} \quad p \in \mathbb{P}_m.$$

I forelesningene ble *Legendre-polynomene* definert ved

$$P_s(x) = \frac{1}{2^s s!} \frac{d^s}{dx^s} \left(x^2 - 1\right)^s.$$

Ved å velge nodene lik nullpunktene i Legendrepolynomet $P_{n+1}$ kan vi konstruere kvadraturformler med presisjonsgrad $2n + 1$ på intervallet $[-1, 1]$.

**a)** Bruk metoden som er beskrevet på s. 230 for å konstruer en kvadraturformel $Q(f; -1, 1)$ med nodene $x_0 = -1$, $x_3 = 1$, og $x_1, x_2$ lik nullpunktene i polynomet $P_3'(x)$ . Bestem metodens presisjonsgrad.

**b)** Ta utgangspunkt i kvardaturet du fant i punkt **a)**, og bruk dette til å finne en tilnærmelse til integralet $\int_{t_j}^{t_j+h} f(t)dt$. Bruk dette igjen til å konstruere en sammensatt kvadraturformel basert på

$$\int_a^b f(t)dt = \sum_{j=0}^{m-1} \int_{t_j}^{t_j+h} f(t)dt, \qquad t_j = a + jh, \quad h = \frac{b-a}{m}.$$

Finn også ett uttrykk for feilen i den sammensatte formelen.

(Det kan vises at $\displaystyle\int_1^1 f(x)dx - Q(f, -1, 1) = -\frac{1}{94500} f^{(6)}(\xi), \quad \xi \in (-1, 1).$)

**c)** Bruk kvadraturformelen fra punkt **b)** med $m = 2$ til å finne en tilnærmelse til integralet

$$\int_0^1 \frac{1}{1+t} dt.$$

Finn også en øvre grense for feilen.