MA2501 Numeriske metoder

Vår 2009

Øving 8

Oppgave 1

Eksamen mai 2003, oppgave 2a) og b).

Oppgave 2

Gitt en ordinær differensialligning

$$y' = f(t, y), \qquad y(t_0) = y_0, \qquad t_0 \leq t \leq t_{end}.$$

En *en-skrittsmetode* for å løse denne differensialligningen kan beskrives ved

$$y_{n+1} = y_n + h\Phi(t_n, y_n; h), \qquad n = 0, 1, \cdots, Nstep - 1, \quad h = \frac{t_{end} - t_0}{Nstep}$$

Anta følgende:

- Den lokale avbruddsfeilen gitt ved

  $$d_{n+1} = y(t_{n+1}) - y(t_n) - h\Phi(t_n, y(t_n); h)$$

  tilfredsstiller

  $$\|d_{n+1}\| \leq Dh^{p+1}$$

  der D er en positiv konstant.

- Funksjonen Φ er Lipschitz, med Lipschitz-konstant M, dvs.

  $$\|\Phi(t_n, y; h) - \Phi(t_n, \tilde{y}; h)\| \leq M\|y - \tilde{y}\|.$$

Vis at i så fall tilfredstiller den globale feilen i t_{end}

$$\|e_{Nstep}\| = \|y(t_{end}) - y_{Nstep}\| \leq Ch^p,$$

der C er en positiv konstant som avhenger av M, D og intervallet $t_{end} - t_0$.

Oppgave 3

Vis at en eksplisitt Runge-Kutta metode med s nivåer maksimalt kan være av orden s.
Hint: Bruk $y' = y$, $y(0) = 1$ som testligning.

Oppgave 4

Implementer en adaptiv Runge-Kutta metode basert på Bogacki-Shampine's metode (søk den opp på Wikipedia). Du kan modifisere koden `rk.m` på kursets hjemmeside.

Bruk koden til å løse Lotka-Volterra ligningen (se notat om Runge-Kutta metoder).

Sammenlign løsningen med den du får ved å bruke en av MATLABs ODL-løsere.