Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Helge Maakestad (900 15294)

Eksamen i Galois teori (MA3202)

Onsdag 30. mai 2007
Tid: 0900 – 13:00

Hjelpemidler: Ingen .

Merk: om det spørres etter bevis i en oppgave betyr dette at det ikke er nok å referere til resultater i boken. Et bevis må gis.

Oppgave 1 La K være en endelig kropp.

a) Vis: det finnes et primtall $p \in \mathbf{Z}$ og en kroppsutvidelse $\mathbf{F}_p = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \subseteq K$, der $\mathbf{F}_p$ er kroppen med p elementer.

b) Vis: antall elementer i K er p^n der $n \geq 1$ er et heltall.

Oppgave 2 La $p \neq q$ være to primtall.

a) Vis: $\sqrt{p} \notin \mathbf{Q}$ og $\sqrt{q} \notin \mathbf{Q}(\sqrt{p})$.

b) Bruk resultatet fra a) til å beregne $[\mathbf{Q}(\sqrt{p}, \sqrt{q}) : \mathbf{Q}]$.

Oppgave 3 La $K = \mathbf{F}_7$ være den endelige kroppen med syv elementer.

a) Faktoriser $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ i irredusible polynomer i $K[x]$.

b) La $K \subseteq K(\alpha)$ være rotkroppen til $f(x)$. Gi en basis B for $K(\alpha)$ over K. Hvor mange elementer har $K(\alpha)$?

c) Uttrykk elementet $\frac{1}{1+\alpha}$ i basisen B.

Oppgave 4 La $p(x) = x^3 - 3$ og $q(x) = x^2 + x + 1$. La α være en rot for $p(x)$ og la ω være en rot for $q(x)$.

a) Vis at $\alpha, \omega\alpha$ og $\omega^2\alpha$ er distinkte røtter for $p(x)$.

b) La $\mathbf{Q} \subseteq E$ være rotkroppen til $p(x)$. Bruk resultatet fra *a)* til å beregne Galois gruppen $G(E/\mathbf{Q})$.

c) La β være en reell rot for $p(x)$ of la $L = \mathbf{Q}(\beta)$. Beregn $H_L \subseteq G(E/\mathbf{Q})$ der H_L er gruppen av automorfier som fikserer L. Er H_L en normal undergruppe av $G(E/\mathbf{Q})$?

Oppgave 5 La $p \in \mathbf{Z}$ være et odde primtall og la $K = \mathbf{F}_p(x)$ være kroppen av rasjonale funksjoner i x med koeffisienter i $\mathbf{F}_p$, der $\mathbf{F}_p$ er den endelige kroppen med p elementer.

a) La $q(T) = T^p - x \in K[T]$ og la $\alpha \in \overline{K}$ være en rot for $q(T)$. Vi får en faktorisering $q(T) = (T - \alpha)^d f(T)$ i $K(\alpha)[T]$, der $d \geq 1$ er et heltall. Regn ut d.

b) Regn ut rotkroppen til $q(T)$.