Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen: Professor Christian Skau
(telefon: 91755)

Eksamen i MA3202 Galoisteori

Torsdag 1. juni 2006
Tid: 09.00 - 13:00
Hjelpemidler: Ingen
Bokmål

Sensur: 22. juni 2005

Oppgave 1

La $f(x) \in F[x]$ være et irredusibelt polynom over kroppen F, der F har karakteristikk 0. La E være rotkroppen til $f(x)$ over F, og anta at Galoisgruppen $G = G(E|F)$ er abelsk.

Vis at hver rot α til $f(x)$ er et primitivt element, dvs. $E = F(\alpha)$.

Oppgave 2

Vis at den diofantiske ligningen

$$y^2 + 2 = z^4$$

ikke har noen løsninger i $\mathbb{Z}$.

[Hint: $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ er et entydig faktoriseringsområde.]

Oppgave 3

La F være en kropp av karakteristikk p, der p er et primtall. La $f(x) \in F[x]$ være et irredusibelt polynom med multiple røtter. Vis at det finnes $s \in \{1, 2, 3, \ldots\}$ og et irredusibelt og *separabelt* polynom $g(x) \in F[x]$, slik at $f(x) = g(x^{p^s})$.

Oppgave 4

a) La K være en Galoisk utvidelse av F. La $g(x) \in K[x]$ være irredusibel over K, og la $\sigma \in G(K|F)$.

Vis at $\sigma(g(x)) \in K[x]$ er irredusibel over K.

b) La $f(x) \in F[x]$ være et (monisk) irredusibelt polynom over F av primtallsgrad p.

Vis at dersom $f(x)$ er redusibel i $K[x]$, så vil alle røttene til $f(x)$ ligge i K.

[F og K er som i a).]

Oppgave 5

La $f(x) = x^3 - 21x + 6 \in \mathbb{Q}[x]$, og la E være rotkroppen til $f(x)$ over $\mathbb{Q}$. Man kan vise at $E \subset \mathbb{R}$. Vis at E ikke er et radikaltårn over $\mathbb{Q}$.

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under Midtsemester:
Professor Christian Skau (9 17 55)

MIDTSEMESTEROPPGAVER I MA3202 GALOISTEORI

Tirsdag 7. mars 2006
Tid: 14.15 – 16.00
Bokmål

Oppgave 1

La $\mathbb{Q}_2$ være mengden av alle rasjonale tall $\frac{a}{b}$, der $a, b \in \mathbb{Z}$ og b er odde.

a) Vis at $\mathbb{Q}_2$ er et integritetsområde.

b) Vis at de irredusible elementene i $\mathbb{Q}_2$ er 2 og dets assosierte elementer.

c) Er $\mathbb{Q}_2$ et entydig faktoriseringsområde (UFD)? Begrunn svaret.

Oppgave 2

a) La $f(x) = x^3 + x - 3 \in \mathbb{Q}[x]$. La α være en rot til $f(x)$. Er rotkroppen E til $f(x)$ over $\mathbb{Q}$ lik $\mathbb{Q}(\alpha)$? Begrunn svaret.

b) La $g(x) = (x^2 - 2)(x^2 - 3) \in \mathbb{Q}[x]$. La K være rotkroppen til $g(x)$ over $\mathbb{Q}$. Vis at $[K : \mathbb{Q}] = 4$.

Oppgave 3

La $f(x) = x^3 + x^2 + 2 \in \mathbb{Z}_3[x]$.

a) Vis at $f(x)$ er irredusibel og ikke har multiple røtter.

b) La α være en rot til $f(x)$. Uttrykk $\dfrac{1}{\alpha^2+1}$ som et annengradspolynom i α over $\mathbb{Z}_3$.

Oppgave 4

La
$$\begin{array}{c} E \\ | \\ K \\ | \\ F \end{array}$$
være kroppsutvidelser.

Anta at K er algebraisk over F og at E er algebraisk over K. Vis at E er algebraisk over F.

Norwegian University of Science and Technology
Department of Mathematical Sciences

Contact during exam:
Alexei Rudakov, Telephone: 73 59 16 95

MA3202 Galois theory

English
Friday June 3, 2005
Kl. 9-13

Permitted aids: All
Grades to be announced: Monday June 24, 2005

Problem 1
Find the sum of the 4th powers of roots of a polynomial $x^4 - x^2 + 3x - 2$ over $\mathbb{Q}$.

Problem 2
Find all units in $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-13}]$. Show that R is <u>not</u> a unique factorization domain (UFD).

Problem 3
Construct an isomorphism of fields

$$F_1 = \mathbb{F}_2[x]/(x^4 + x + 1) \quad \text{and} \quad F_2 = \mathbb{F}_2[y]/(y^4 + y^3 + y^2 + y + 1).$$

Problem 4
Find all $a \in \mathbb{F}_3$, such that the polynomial $x^4 + ax^3 + x - 1$ is irreducible over $\mathbb{F}_3$.

Problem 5
Let $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-2}, \sqrt{-3}, \sqrt{-5}) \subset \mathbb{C}$.

a) Show that there exist an automorphism $\varphi : K \to K$, such that

$$\varphi(\sqrt{-2}) = \sqrt{-2}, \quad \varphi(\sqrt{-3}) = \sqrt{-3}, \quad \varphi(\sqrt{-5}) = \sqrt{-5}.$$

b) Suppose α is a root of $h(x) = x^3 - 2\sqrt{-2} + \sqrt{-3} \quad \in K[x]$ and $L = K(\alpha)$.
Find the number of homomorphisms $\tau : L \to \mathbb{C}$, such that $\tau|_K = \varphi$.

Problem 6
Find the number of elements in the splitting field of a polynomial

$$f(x) = x^{14} - 2x^7 + 7 \ \in \mathbb{F}_{11}[x].$$

Problem 7
Find (up to isomorhism) the Galois group of the splitting field K of a polynomial $g(x) = x^5 - 10x + 5$ over $\mathbb{Q}$.
(you may use without proving some results from Group theory, but each time the statement you need should be written down.) How many subfields $M \subset K$, such that $[K : M] = 5$ are in K?

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Christian Skau, Telefon: 9 17 55

MNFMA319 Kommutativ algebra og Galoisteori

Bokmål
Fredag 14. mai 2004
Kl. 9-13
Hjelpemidler: Ingen.
Sensur: Mandag 24. mai 2004

Oppgave 1

a) Bevis at dersom D er et integritetsområde som ikke er en kropp, så er $D[x]$ ikke euklidisk.

b) Vis at 3 er irredusibel, men ikke primisk, i integritetsområdet $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.

Oppgave 2

a) Bestem Galoisgruppen til $x^3 - 7 \in \mathbb{Q}[x]$ over $\mathbb{Q}$.

b) La E betegne rotkroppen til $x^3 - 7$ over $\mathbb{Q}$. Hvor mange mellomkropper $F(\mathbb{Q} \subset F \subset E)$, slik at $[F : \mathbb{Q}] = 2$, er det? Begrunn svaret.

Oppgave 3

La p være et primtall. La E være rotkroppen til $x^p - 1 \in \mathbb{Q}[x]$ over $\mathbb{Q}$.

a) Vis at $G(E/\mathbb{Q})$ er abelsk av orden $p - 1$.

b) La $\omega = e^{\frac{2\pi i}{31}}$. Vis at det finnes en underkropp F av $\mathbb{C}$ slik at $[F(\omega) : F] = 5$.

Oppgave 4

a) La F være en kropp av karakteristikk p, der $0 < p \neq 3$. La α være en rot til $f(x) = x^p - x + 3 \in F[x]$ som ligger i F. Vis at $f(x)$ har p distinkte røtter som ligger i F.

[HINT: Vis at $\alpha + 1$ er en rot.]

b) Uten direkte å beregne, bestem antallet av moniske, irredusible polynomer av grad 2 over kroppen $\mathbb{Z}_7 = GF(7)$.

Oppgave 5

Vis at $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ er irrasjonal.

[HINT: Betrakt $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ og $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3})$.]