

Faglig kontakt under eksamen: Professor Christian Skau
(telefon: 91755)

Eksamen i MA3202 Galoisteori

Torsdag 1. juni 2006
Tid: 09.00 - 13:00
Hjelpemidler: Ingen
Bokmål

Sensur: 22. juni 2005

Oppgave 1

La $f(x) \in F[x]$ være et irreducibelt polynom over kroppen F , der F har karakteristikk 0. La E være rotkroppen til $f(x)$ over F , og anta at Galoisgruppen $G = G(E|F)$ er abelsk.

Vis at hver rot α til $f(x)$ er et primitivt element, dvs. $E = F(\alpha)$.

Oppgave 2

Vis at den diofantiske ligningen

$$y^2 + 2 = z^4$$

ikke har noen løsninger i \mathbb{Z} .

[Hint: $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ er et entydig faktoreringsområde.]

Oppgave 3

La F være en kropp av karakteristikk p , der p er et primtall. La $f(x) \in F[x]$ være et irreducibelt polynom med multiple røtter. Vis at det finnes $s \in \{1, 2, 3, \dots\}$ og et irreducibelt og *separabelt* polynom $g(x) \in F[x]$, slik at $f(x) = g(x^{p^s})$.

Oppgave 4

a) La K være en Galoisk utvidelse av F . La $g(x) \in K[x]$ være irreducibel over K , og la $\sigma \in G(K|F)$.

Vis at $\sigma(g(x)) \in K[x]$ er irreducibel over K .

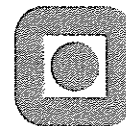
b) La $f(x) \in F[x]$ være et (monisk) irreducibelt polynom over F av primtallsgrad p .

Vis at dersom $f(x)$ er redusibel i $K[x]$, så vil alle røttene til $f(x)$ ligge i K .

[F og K er som i a).]

Oppgave 5

La $f(x) = x^3 - 21x + 6 \in \mathbb{Q}[x]$, og la E være rotkroppen til $f(x)$ over \mathbb{Q} . Man kan vise at $E \subset \mathbb{R}$. Vis at E ikke er et radikaltårn over \mathbb{Q} .



Faglig kontakt under Midtsemester:
Professor Christian Skau (9 17 55)

MIDTSEMESTEROPPGAVER I MA3202 GALOISTEORI

Tirsdag 7. mars 2006

Tid: 14.15 – 16.00

Bokmål

Oppgave 1

La \mathbb{Q}_2 være mengden av alle rasjonale tall $\frac{a}{b}$, der $a, b \in \mathbb{Z}$ og b er odde.

- Vis at \mathbb{Q}_2 er et integritetsområde.
- Vis at de irreducible elementene i \mathbb{Q}_2 er 2 og dets assosierte elementer.
- Er \mathbb{Q}_2 et entydig faktoriseringsområde (*UFD*)? Begrunn svaret.

Oppgave 2

- La $f(x) = x^3 + x - 3 \in \mathbb{Q}[x]$. La α være en rot til $f(x)$. Er rotkroppen E til $f(x)$ over \mathbb{Q} lik $\mathbb{Q}(\alpha)$? Begrunn svaret.
- La $g(x) = (x^2 - 2)(x^2 - 3) \in \mathbb{Q}[x]$. La K være rotkroppen til $g(x)$ over \mathbb{Q} . Vis at $[K : \mathbb{Q}] = 4$.

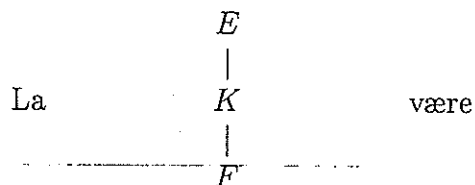
Oppgave 3

La $f(x) = x^3 + x^2 + 2 \in \mathbb{Z}_3[x]$.

a) Vis at $f(x)$ er irreducibel og ikke har multiple røtter.

b) La α være en rot til $f(x)$. Uttrykk $\frac{1}{\alpha^2 + 1}$ som et annengradspolynom i α over \mathbb{Z}_3 .

Oppgave 4



kroppsutvidelser.

Anta at K er algebraisk over F og at E er algebraisk over K . Vis at E er algebraisk over F .



Contact during exam:
Alexei Rudakov, Telephone: 73 59 16 95

MA3202 Galois theory
English
Friday June 3, 2005
Kl. 9-13

Permitted aids: All
Grades to be announced: Monday June 24, 2005

Problem 1

Find the sum of the 4th powers of roots of a polynomial $x^4 - x^2 + 3x - 2$ over \mathbb{Q} .

Problem 2

Find all units in $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-13}]$. Show that R is not a unique factorization domain (UFD).

Problem 3

Construct an isomorphism of fields

$$F_1 = \mathbb{F}_2[x]/(x^4 + x + 1) \quad \text{and} \quad F_2 = \mathbb{F}_2[y]/(y^4 + y^3 + y^2 + y + 1).$$

Problem 4

Find all $a \in \mathbb{F}_3$, such that the polynomial $x^4 + ax^3 + x - 1$ is irreducible over \mathbb{F}_3 .

Problem 5

Let $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-2}, \sqrt{-3}, \sqrt{-5}) \subset \mathbb{C}$.

a) Show that there exist an automorphism $\varphi : K \rightarrow K$, such that

$$\varphi(\sqrt{-2}) = \sqrt{-2}, \quad \varphi(\sqrt{-3}) = \sqrt{-3}, \quad \varphi(\sqrt{-5}) = \sqrt{-5}.$$

b) Suppose α is a root of $h(x) = x^3 - 2\sqrt{-2} + \sqrt{-3} \in K[x]$ and $L = K(\alpha)$.
Find the number of homomorphisms $\tau : L \rightarrow \mathbb{C}$, such that $\tau|_K = \varphi$.

Problem 6

Find the number of elements in the splitting field of a polynomial

$$f(x) = x^{14} - 2x^7 + 7 \in \mathbb{F}_{11}[x].$$

Problem 7

Find (up to isomorphism) the Galois group of the splitting field K of a polynomial

$$g(x) = x^5 - 10x + 5 \text{ over } \mathbb{Q}.$$

(you may use without proving some results from Group theory, but each time the statement you need should be written down.) How many subfields $M \subset K$, such that $[K : M] = 5$ are in K ?



Faglig kontakt under eksamen:
Christian Skau, Telefon: 9 17 55

MNFMA319 Kommutativ algebra og Galoisteori

Bokmål

Fredag 14. mai 2004

Kl. 9-13

Hjelpemidler: Ingen.

Sensur: Mandag 24. mai 2004

Oppgave 1

- Bevis at dersom D er et integritetsområde som ikke er en kropp, så er $D[x]$ ikke euklidisk.
- Vis at 3 er irreducibel, men ikke primisk, i integritetsområdet $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.

Oppgave 2

- Bestem Galoisgruppen til $x^3 - 7 \in \mathbb{Q}[x]$ over \mathbb{Q} .
- La E betegne rotkroppen til $x^3 - 7$ over \mathbb{Q} . Hvor mange mellomkropper $F(\mathbb{Q} \subset F \subset E)$, slik at $[F : \mathbb{Q}] = 2$, er det? Begrunn svaret.

Oppgave 3

La p være et primtall. La E være rotkroppen til $x^p - 1 \in \mathbb{Q}[x]$ over \mathbb{Q} .

- Vis at $G(E/\mathbb{Q})$ er abelsk av orden $p - 1$.
- La $\omega = e^{\frac{2\pi i}{31}}$. Vis at det finnes en underkropp F av \mathbb{C} slik at $[F(\omega) : F] = 5$.

Oppgave 4

a) La F være en kropp av karakteristikk p , der $0 < p \neq 3$. La α være en rot til $f(x) = x^p - x + 3 \in F[x]$ som ligger i F . Vis at $f(x)$ har p distinkte røtter som ligger i F .

[HINT: Vis at $\alpha + 1$ er en rot.]

b) Uten direkte å beregne, bestem antallet av moniske, irreducible polynomer av grad 2 over kroppen $\mathbb{Z}_7 = GF(7)$.

Oppgave 5

Vis at $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ er irrasjonal.

[HINT: Betrakt $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ og $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3})$.]