Institutt for matematiske fag

MA3202 Galoisteori

Midtsemesteroppgaver våren 2004

Oppgave 1

a) I det Euklidiske integritetsområdet $\mathbb{Z}[i]$, vis at $(2+iy, 2-iy) = 1$, når y er et odde helt tall. ((a,b) betegner største felles divisor av a og b.)

b) Vis at den diophantiske ligningen

$$y^2 + 4 = z^3$$

bare har heltallsløsningene $y = \pm 11, z = 5$, dersom y skal være et odde heltall.
(Hint: Faktoriser $y^2 + 4$ i $\mathbb{Z}[i]$.)

c) Dersom y er like, vis at da må $y = \pm 2$ og $z = 2$.
(Hint: Sett $y = 2Y$)

Oppgave 2

a) Bevis at dersom D er et integritetsområde som ikke er en kropp, så er $D[x]$ ikke euklidisk.

b) Vis at 3 er irredusibel, men ikke primisk, i integritetsområdet $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.

Oppgave 3

a) Finn et passende tall $a \in \mathbb{C}$ slik at $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, i) = \mathbb{Q}(a)$, og bestem minimalpolynomet til a over $\mathbb{Q}$.

b) La α være en rot til $x^4 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$. Uttrykk $\dfrac{1}{\alpha^2 - \alpha + 1}$ som $p(\alpha)$, der $p(x) \in \mathbb{Q}[x]$ er et polynom av grad ≤ 3.

Oppgave 4

a) La $x^n - a \in F[x]$ være et irredusibelt polynom over F, og la $b \in K$ være en rot, der K er en utvidelseskropp av F. Dersom m er et naturlig tall slik at $m|n$, bestem graden til minimalpolynomet til b^m over F.

b) La D være et integritetsområde, og la F være en underkropp av D, slik at $[D : F] < \infty$. Vis at D er en kropp.