Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

ST0103 2013H – løsningsskisse

Oppgave 1

a) La X være reaksjonsfarten.

$$P(X > 13) = P\left(\frac{X-11}{1{,}8} > \frac{13-11}{1{,}8}\right)$$
$$= P(Z > 1{,}11) = 1 - P(Z \le 1,11) = 1 - 0{,}8665 = 0{,}1335.$$

$$P(X > 13 \mid X > 11) = \frac{P(X > 13 \cap X > 13)}{P(X > 11)} = \frac{P(X > 13)}{P(X > 11)} = \frac{0{,}1335}{1/2} = 0{,}267.$$

($P(X > 11) = \frac{1}{2}$ fordi sannsynlighetstettheten til X er symmetrisk om 11.)

b) Et 99 %-konfidensintervall har grenser $\bar{x} \pm z_{0{,}005}\sigma/\sqrt{n} = 10{,}2 \pm 2{,}576 \cdot 1{,}8/\sqrt{15} = 10{,}2 \pm 1{,}2$, som gir intervallet $[9{,}0, 11{,}4]$.

Lengden av intervallet er $2z_{0{,}005}\sigma/\sqrt{n}$, og hvis vi krever $2z_{0{,}005}\sigma/\sqrt{n} < 2$, må $n > (z_{0{,}005}\sigma)^2 = (2{,}576 \cdot 1{,}8)^2 = 21{,}5$. Altså måtte n ha vært 22 eller større.

c) La $\bar{X}$ være gjennomsnittlig reaksjonsfart for de 15 reaksjonene. Vi forkaster nullhypotesen for *små* verdier av $\bar{X}$, altså for *små* verdier av $Z = (\bar{X} - 11{,}0)/(\sigma/\sqrt{n})$, som er standard normalfordelt hvis nullhypotesen er sann med $\mu = 11{,}0$. Signifikansnivået på 0,05 spesifiserer en sannsynlighet på 0,05 for å forkaste nullhypotesen hvis $\mu = 11{,}0$, slik at kritisk verdi er $-z_{0{,}05} = -1{,}645$. Her er $z = (10{,}2 - 11{,}0)/(1{,}8/\sqrt{15}) = -1{,}72$, som ligger i forkastningsområdet, og vi forkaster nullhypotesen. På 0,05-signifikansnivå har vi grunnlag for å si at laboratoriet ikke klarer en forventet reaksjonsfart på 11,0 mikromol pr. time. (P-verdien er $P(Z \le -1{,}72) = 0{,}043$, der Z er standard normalfordelt.)

d) Alle sannsynligheter beregnes under forutsetning av at $\mu = 10{,}2$: Teststyrken i $\mu = 10{,}2$ er lik

$$P(\text{nullhypotesen forkastes}) = P\left(\frac{\bar{X} - 11{,}0}{1{,}8/\sqrt{15}} \le -1{,}645\right)$$
$$= P\left(\frac{\bar{X} - 10{,}2}{1{,}8/\sqrt{15}} \le -1{,}645 + \frac{0{,}8}{1{,}8/\sqrt{15}}\right) = P(Z \le 0{,}08) = 0{,}53,$$

der Z er standard normalfordelt.

Oppgave 2

a) Forventningsverdien er

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx = \int_0^1 x \cdot \theta x^{\theta-1} dx = \int_0^1 \theta x^{\theta} dx = \left[\frac{\theta}{\theta+1} x^{\theta+1}\right]_0^1 = \frac{\theta}{\theta+1}.$$

Videre er

$$EX^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx = \int_0^1 x^2 \cdot \theta x^{\theta-1} dx = \int_0^1 \theta x^{\theta+1} dx = \left[\frac{\theta}{\theta+2} x^{\theta+2}\right]_0^1 = \frac{\theta}{\theta+2},$$

slik at

$$\operatorname{Var} X = EX^2 - (EX)^2 = \frac{\theta}{\theta+2} - \frac{\theta^2}{(\theta+1)^2} = \frac{\theta(\theta+1)^2 - \theta^2(\theta+2)}{(\theta+1)^2(\theta+2)} = \frac{\theta}{(\theta+1)^2(\theta+2)}.$$

b) Kumulativ fordelingsfunksjon er gitt ved $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_0^x \theta t^{\theta-1} dt = \left[t^{\theta}\right]_0^x = x^{\theta}$ når $0 < x < 1$.

$P(X > \frac{1}{2}) = 1 - F(\frac{1}{2}) = 1 - 1/2^{\theta}$.

c) Likelihoodfunksjonen er gitt ved $L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i) = \prod_{i=1}^n \theta x_i^{\theta-1} = \theta^n \left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{\theta-1}$ og loglikelihoodfunksjonen ved $\ln L(\theta) = n \ln\theta + (\theta - 1)\sum_{i=1}^n \ln x_i$. Da er $(\ln L)'(\theta) = n/\theta + \sum_{i=1}^n \ln x_i$, som er lik null for $\theta = -n/\sum_{i=1}^n \ln x_i$. Sannsynlighetsmaksimeringsestimatoren er altså $-n/\sum_{i=1}^n \ln X_i$.

d) La $Y = X^{\theta}$. Da er kumulativ fordelingsfunksjon for Y gitt ved $P(Y \le y) = P(X^{\theta} \le y) = P(X \le y^{1/\theta}) = F(y^{1/\theta}) = (y^{1/\theta})^{\theta} = y$ for $0 < y < 1$. Sannsynlighetstettheten f_Y til Y er dermed gitt ved $f_Y(y) = \frac{d}{dy} y = 1$ for $0 < y < 1$ og $f_Y(y) = 0$ ellers (så Y er uniformt fordelt på $(0,1)$).

Oppgave 3

a) Forventningsverdien til estimatoren er

$$E\frac{X_1}{p_1} = \frac{1}{p_1} EX_1 = \frac{1}{p_1} n p_1 = n,$$

så estimatoren er forventningsrett. Variansen er

$$\operatorname{Var} \frac{X_1}{p_1} = \frac{1}{p_1^2} \operatorname{Var} X_1 = \frac{1}{p_1^2} n p_1 (1 - p_1) = \frac{n(1-p_1)}{p_1}.$$

Estimatet blir $150/0{,}60 = 250$.

b) La $\hat{n} = \frac{1}{3}(X_1/p_1 + X_2/p_2)$ og $\tilde{n} = 0{,}38X_1/p_1 + 0{,}62X_2/p_2$. Da er

$$E\hat{n} = E\left(\frac{1}{2}\left(\frac{X_1}{p_1} + \frac{X_2}{p_2}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(E\frac{X_1}{p_1} + E\frac{X_2}{p_2}\right) = \frac{1}{2}(n+n) = n,$$

og

$$E\tilde{n} = E\left(0{,}38\frac{X_1}{p_1} + 0{,}62\frac{X_2}{p_2}\right) = 0{,}38E\frac{X_1}{p_1} + 0{,}62E\frac{X_2}{p_2} = 0{,}38n + 0{,}62n = n,$$

så begge estimatorene er forventningsrette, men

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}\hat{n} &= \operatorname{Var}\left(\frac{1}{3}\left(\frac{X_1}{p_1} + \frac{X_2}{p_2}\right)\right) = \frac{1}{4}\left(\operatorname{Var}\frac{X_1}{p_1} + \operatorname{Var}\frac{X_2}{p_2}\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(n\frac{1-p_1}{p_1} + n\frac{1-p_2}{p_2}\right) = \frac{n}{4}\left(\frac{1-0{,}60}{0{,}60} + \frac{1-0{,}71}{0{,}71}\right) = 0{,}269n,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}\tilde{n} &= \operatorname{Var}\left(0{,}38\frac{X_1}{p_1} + 0{,}62\frac{X_2}{p_2}\right) = 0{,}38^2\operatorname{Var}\frac{X_1}{p_1} + 0{,}62^2\operatorname{Var}\frac{X_2}{p_2}\\ &= 0{,}38^2 n\frac{1-p_1}{p_1} + 0{,}62^2 n\frac{1-p_2}{p_2} = n\left(0{,}38^2\frac{1-0{,}60}{0{,}60} + 0{,}62^2\frac{1-0{,}71}{0{,}71}\right) = 0{,}253n,\end{aligned}$$

så $\tilde{n}$ foretrekkes. Estimatene blir $\hat{n} = \frac{1}{2}(150/0{,}60 + 180/0{,}71) = 251{,}8$ og $\tilde{n} = 0{,}38\cdot 150/0{,}60 + 0{,}62\cdot 180/0{,}71) = 252{,}2$.