NTNU

Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **ST0103 Brukerkurs i statistikk**

Faglig kontakt under eksamen: Øyvind Bakke

Tlf: 73 59 81 26, 990 41 673

Eksamensdato: august 2016

Eksamenstid (fra–til): 9.00–13.00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: Gult A4-ark med egne håndskrevne notater, bestemt kalkulator (Casio fx-82ES Plus, Citizen SR-270X, Citizen SR-270X College eller HP 30s), *Tabeller og formler i statistikk* (Tapir forlag eller Fagbokforlaget), *Matematisk formelsamling* (K. Rottmann)

Annen informasjon:
I vurderingen teller hvert av de ti bokstavpunktene likt.

Alle svar skal begrunnes (f.eks. ved at mellomregning tas med eller ved henvisning til teori eller eksempler fra pensum).

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 2

Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Dato Sign

Oppgave 1

Alunskifer er en syredannende leirskiferbergart. Det er mange problemer knyttet til alunskifer, og i forbindelse med bygge- og graveprosjekter må alunskifer håndteres spesielt.

Alunskifer gir alltid svart strek ved riping med kniv. Men også andre leirskifertyper kan gi svart strek. I et område utgjør 80 % av forekomstene av leirskifer andre typer enn alunskifer. Sannsynligheten for at en leirskifer som ikke er alunskifer gir svart strek er 0,3.

En prøve av leirskifer fra dette området gir svart strek.

a) Hva er sannsynligheten for at prøven består av alunskifer?

Et mulig problem med alunskifer er høyt innhold av uran, som gir radioaktivitet. Anta at uraninnholdet målt i mg/kg i en tilfeldig valgt prøve av alunskifer fra dette området er normalfordelt med forventningsverdi μ. Det tas 10 uavhengige prøver, og gjennomsnittlig uraninnhold er 90,8 og utvalgsstandardavviket 1,4.

b) Test nullhypotesen $\mu \leq 90$ mot den alternative hypotesen $\mu > 90$. Bruk signifikansnivå 0,05.

Oppgave 2

Karbon har to stabile isotoper som forekommer naturlig, ^{12}C og ^{13}C. På jorda er 98,9 % av karbonatomene ^{12}C og 1,1 % av karbonatomene ^{13}C. Anta at antall ^{13}C-atomer, X, i et molekyl med n karbonatomer er binomisk fordelt med parametre n og $p = 0{,}011$.

Molekylet til en biopolymer inneholder 100 karbonatomer.

a) Hvilke forutsetninger må være oppfylt for at X skal være binomisk fordelt? Finn sannsynligheten for at biopolymermolekylet inneholder 3 eller flere ^{13}C-atomer.

b) Finn sannsynligheten for at en poissonfordelt variabel med forventningsverdi 1,1 er mindre enn eller lik 2. Bruk dette til å finne en tilnærmet verdi av sannsynligheten fra (a).

Et poliovirus har bruttoformel $C_{332652}H_{492388}N_{98245}O_{131196}P_{7501}S_{2340}$, og inneholder altså 332 652 karbonatomer.

c) Hva er forventningsverdien og standardavviket for antall ^{13}C-atomer i viruset? Finn en tilnærmet sannsynlighet for at dette antallet er 3700 eller mer.

Oppgave 3

Lengden T målt i døgn (trenger ikke være heltallig) av puppestadiet til en afrikansk sommerfuglart er eksponentielt fordelt – det vil si at sannsynlighetstettheten er gitt ved $f(t) = \frac{1}{\mu}e^{-t/\mu}$, der $t > 0$, og $\mu > 0$ er en parameter. (I læreboka er sannsynlighetstettheten av form $\lambda e^{-\lambda t}$, der $\lambda = 1/\mu$.)

a) Vis ved utregning at kumulativ fordelingsfunksjon for T er gitt ved $P(T \leq t) = 1 - e^{-t/\mu}, \;\; t > 0$.

b) Anta (bare i dette punktet) at $\mu = 20$. Finn $P(T \geq 20)$. Finn den betingede sannsynligheten $P(T \geq 30 \mid T \geq 10)$.

La $T_1, T_2, \ldots, T_n$ være uavhengige observasjoner av lengden av puppestadiet.

c) Vis at sannsynlighetsmaksimeringsestimatoren for μ er gjennomsnittet, $\bar{T}$, av observasjonene. Finn forventningsverdien og variansen til estimatoren.

d) Vis at $\frac{2}{\mu}T$ er khikvadratfordelt med 2 frihetsgrader. (Vink: Du kan bruke at $\Gamma(1) = 1$ i formelen i formelsamlingen for sannsynlighetstettheten til en khikvadratfordelt variabel.)

Det kan mer generelt vises at $\frac{2}{\mu}\sum_{i=1}^{n} T_i$ er khikvadratfordelt med $2n$ frihetsgrader.

e) Vis at

$$\left[\frac{2}{\chi_{\alpha/2}}\sum_{i=1}^{n} T_i, \frac{2}{\chi_{1-\alpha/2}}\sum_{i=1}^{n} T_i\right]$$

er et $100(1-\alpha)$ %-konfidensintervall for μ, der χ_α er tallet som er slik at $P(Y \geq \chi_\alpha) = \alpha$ når Y er khikvadratfordelt med $2n$ frihetsgrader. Hva blir 95 %-konfidensintervallet hvis $n = 40$ og $\bar{T} = 28{,}3$?