ØVINGER 2017

Løsninger til oppgaver

Øving 10

6.1. Trekker 20 tilfeldige tall mellom 1 og 160:

53	78	71	88	145
144	70	9	147	72
132	67	154	37	129
74	83	110	159	85

Ingen av disse tallene svarer til defekte enheter i figur 6.1, dermed blir den estimerte defektandelen $0/20 = 0$. Totalt er det $N = 160$ enheter. Av disse er $M = 13$ defekte. Vi velger ut $n = 20$ enheter tilfeldig, uten tilbakelegging. Antall defekte enheter X i utvalget er da hypergeometrisk fordelt med parametre N, M og n, og forventet antall defekte enheter i utvalget er

$$E[X] = n\hat{p} = n \cdot \frac{M}{N} = 20 \cdot \frac{13}{160} = 1.625,$$

hvor $\hat{p} = M/N$ er estimert defektandel. Dersom vi gjentar forsøket vil antall defekte enheter i utvalget være mellom 0 og 13. Den estimerte defektandelen kan derfor bli alt fra $0/20 = 0$ til $13/20 = 0.65$. Den sanne defektandelen er $13/160 = 0.0813$.

6.2. Den første estimatoren $\hat{\mu}_1$ har forventningsverdi

$$E[\hat{\mu}_1] = \frac{2E[X_1] + 5E[X_2]}{7} = \frac{2\mu + 5\mu}{7} = \mu,$$

og varians

$$Var[\hat{\mu}_1] = \left(\frac{2}{7}\right)^2 Var[X_1] + \left(\frac{5}{7}\right)^2 Var[X_2] = \left(\left(\frac{2}{7}\right)^2 + \left(\frac{5}{7}\right)^2\right)\sigma^2 = 0.5918\sigma^2.$$

Den andre estimatoren $\hat{\mu}_2$ har forventningsverdi

$$E[\hat{\mu}_2] = \frac{E[X_1] + E[X_2]}{2} = \frac{\mu + \mu}{2} = \mu,$$

og varians

$$Var[\hat{\mu}_2] = \left(\frac{1}{2}\right)^2 Var[X_1] + \left(\frac{1}{2}\right)^2 Var[X_2] = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)\sigma^2 = 0.5\sigma^2.$$

Den tredje estimatoren $\hat{\mu}_3$ har forventningsverdi

$$E[\hat{\mu}_3] = 175 + \frac{E[X_1]}{100} = 175 + \frac{\mu}{100},$$

og varians

$$Var[\hat{\mu}_3] = \left(\frac{1}{100}\right)^2 Var[X_1] = 10^{-4} \cdot \sigma^2.$$

Siden $\hat{\mu}_1$ og $\hat{\mu}_2$ er forventningsrette, mens $\hat{\mu}_3$ ikke er det, og siden $Var[\hat{\mu}_2] < Var[\hat{\mu}_1]$, så er $\hat{\mu}_2$ den beste estimatoren.

6.4. Estimatorene $\hat{\mu}_1$ og $\hat{\mu}_2$ har forventingsverdi

$$E[\hat{\mu}_1] = \frac{E[\bar{X}] + E[\bar{Y}]}{16} = \frac{\mu + 15\mu}{16} = \mu$$

og

$$E[\hat{\mu}_2] = \frac{E[\bar{X}] + 4E[\bar{Y}]}{61} = \frac{\mu + 4 \cdot 15\mu}{61} = \mu,$$

og varians

$$Var[\hat{\mu}_1] = \left(\frac{1}{16}\right)^2 Var[\bar{X}] + \left(\frac{1}{16}\right)^2 Var[\bar{Y}] =$$

$$= \left(\frac{1}{16}\right)^2 \frac{\sigma^2}{5} + \left(\frac{1}{16}\right)^2 \frac{4\sigma^2}{5} = 0.0039\sigma^2$$

og

$$Var[\hat{\mu}_2] = \left(\frac{1}{61}\right)^2 Var[\bar{X}] + \left(\frac{4}{61}\right)^2 \frac{4\sigma^2}{5} = 0.0035\sigma^2.$$

Begge estimatorene er forventningsrette, men $\hat{\mu}_2$ er best, siden $Var[\hat{\mu}_2] < Var[\hat{\mu}_1]$.

6.5.

$$X_1 = Y_1 + Y_2 + ... + Y_{30},\ X_2 = Y_{31} + Y_{32} + ... + Y_{100},$$

hvor $Y_1, Y_2, ..., Y_{100}$ er uavhengige og identisk fordelte variabler slik at hver Y tar to verdier, 1 (defekt) og 0 (ikke defekt).

$$P(Y_i = 1) = p,\ P(Y_i = 0) = 1 - p.$$

p estimeres.

Da

$$EY_i = p,\ \mathrm{Var}Y_i = p(1-p),$$

$$EX_1 = 30p,\ \mathrm{Var}X_1 = 30p(1-p),\ EX_2 = 70p,\ \mathrm{Var}X_1 = 70p(1-p),$$

og

$$E\hat{p}_1 = \frac{1}{100}(EX_1 + EX_2) = p,$$

$$\mathrm{Var}\hat{p}_1 = \frac{1}{100^2}(\mathrm{Var}X_1 + \mathrm{Var}X_2) = \frac{30^2 + 70^2}{100^2}p(1-p) = 0.58p(1-p),$$

$$E\hat{p}_2 = \frac{1}{580}(3EX_1 + 7EX_2) = p,$$

$$\mathrm{Var}\hat{p}_2 = \frac{1}{580^2}(9\mathrm{Var}X_1 + 49\mathrm{Var}X_2) = \frac{9 \cdot 30^2 + 49 \cdot 70^2}{580^2}p(1-p) > 0.73p(1-p).$$

Begge estimatorene er forventningsrette, $\mathrm{Var}\hat{p}_1 < \mathrm{Var}\hat{p}_2$. $\hat{p}_1$ er best.

6.6.

$$E\hat{\lambda} = \frac{EX}{t} = \frac{\lambda t}{t} = \lambda,$$

$$\mathrm{Var}\hat{\lambda} = \frac{\mathrm{Var}X}{t^2} = \frac{\lambda t}{t^2} = \frac{\lambda}{t} \to 0$$

når $t \to \infty$.