ØVINGER 2017
Løsninger til oppgaver

Øving 11

6.12 (10). Siden $\bar{X}$ er normalfordelt med forventningsverdi μ og varians $\sigma^2/16$, vil den tilfeldige variabelen

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{16}}$$

være standard normalfordelt. Et 95% konfidensintervall for Z er $(-z_{0.025}, z_{0.025})$ eller $(-1.96, 1.96)$, og tilsvarende konfidensintervall for μ blir

$$\left(\bar{x} - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{16}}, \bar{x} + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{16}}\right).$$

Ved å sette inn verdier blir dette

$$\left(2316 - 1.96 \cdot \frac{2.04}{4}, 2316 + 1.96 \cdot \frac{2.04}{4}\right)$$

eller

$$(2315, 2317)\,.$$

Tilleggsoppgave: For å oppnå et 95% konfidensintervall med lengde 0.2, må vi ha

$$\left(\bar{x} + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) - \left(\bar{x} - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 0.2$$

$$2 \cdot 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0.2$$

$$\frac{2 \cdot 1.96\sigma}{0.2} = \sqrt{n},$$

som gir

$$n = \left(\frac{2 \cdot 1.96\sigma}{0.2}\right)^2 = \left(\frac{2 \cdot 1.96 \cdot 2.04}{0.2}\right)^2 = 39.984^2 = 1598.7.$$

Det nødvendige antallet målinger blir dermed $n \geq 1599$.

6.13 (11). La $x_1, x_2, \ldots, x_6$ betegne de seks observasjonene. Middelverdien til utvalget er

$$\bar{x} = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} x_i = 30.5,$$

og standardavviket er

$$s = \sqrt{\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{6}(x_i - \bar{x})^2} = 1.0488.$$

Variabelen

$$T = \frac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{6}}$$

er t-fordelt med 5 frihetsgrader. For å beregne et 95% konfidensintervall trenger vi 0.025-kvantilet til denne fordelingen; $t_{5,0.025} = 2.5706$. Et 95% konfidensintervall for μ har da endepunktene

$$\bar{x} \pm t_{5,0.025}\frac{s}{\sqrt{6}} = 30.5 \pm 2.5706 \cdot \frac{1.0488}{\sqrt{6}}.$$

Dette svarer til intervallet $(29.4, 31.6)$.

6.14 (12). I den store undersøkelsen vil antall kontrollerte pizzaer, n, være stort nok til at t-fordelingen med $n-1$ frihetsgrader blir tilnærmet lik standard normalfordelingen. Vi antar derfor at den tilfeldige variabelen T fra forrige oppgave er standard normalfordelt, og bruker 0.025-kvantilet $z_{0.025} = 1.96$. Setter vi lengden til 95% konfidensintervallet for μ lik 0.2 får vi

$$\left(\bar{x} + z_{0.025}\frac{s}{\sqrt{n}}\right) - \left(\bar{x} - z_{0.025}\frac{s}{\sqrt{n}}\right) = 0.2$$

$$2 \cdot 1.96\frac{s}{\sqrt{n}} = 0.2$$

som gir

$$n = \left(\frac{2 \cdot 1.96 \cdot 1.0488}{0.2}\right)^2 = 20.5565^2 = 422.56.$$

For at lengden til konfidensintervallet skal være mindre enn 0.2, må antall kontrollerte pizzaer være $n \geq 423$.

6.20 (18). *Hypotesetest*

La X være fettinnholdet, i prosent, til en tilfeldig valgt prøve. Da er X normalfordelt med forventningsverdi μ og standardavvik $\sigma = 3$. Kall de $n = 9$ oppgitte målingene $x_1, x_2, \ldots, x_9$. Da har vi $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = 15.44$. Vi vil teste hypotesene

$$H_0: \ \mu \leq \mu_0, \quad H_1: \ \mu > \mu_0,$$

hvor $\mu_0 = 14$. Under nullhypotesen er testobservatoren

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

standard normalfordelt Vi forkaster H_0 på signifikansnivå $\alpha = 0.05$ hvis vi observerer $z > z_{0.05} = 1.6449$. Observert verdi er

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{15.44 - 14}{3/\sqrt{9}} = 1.44,$$

og vi beholder derfor H_0 påsignifikansnivå0.05. Målingene gir med andre ord ikke grunnlag for å si at fettinnholdet er for høyt.

p-verdi

Testens p-verdi er

$$P(Z > z) = 1 - P(Z \leq z) = 1 - G(1.44) = 0.0749.$$

Styrkefunksjon

Styrkefunskjonen $\gamma(\mu)$ til hypotesetesten er lik sannsynligheten for å forkaste H_0 gitt at den sanne forventningsverdien til X er μ. Vi har altså

$$\gamma(\mu) = P\left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > z_{0.05}\right) = P\left(\bar{X} - \mu_0 > z_{0.05}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) =$$

$$= P\left(\bar{X} - \mu > z_{0.05}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} + \mu_0 - \mu\right) = P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} > z_{0.05} + \frac{\mu_0 - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right) =$$

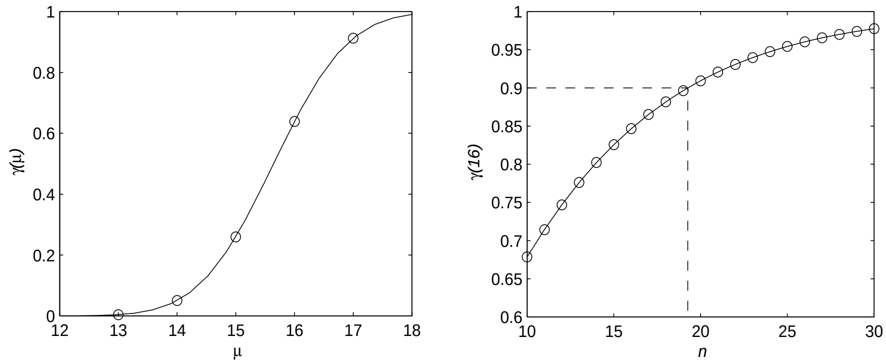
$$= 1 - P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq z_{0.05} + \frac{\mu_0 - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = 1 - G\left(z_{0.05} + \frac{\mu_0 - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right) =$$

$$= 1 - G\left(1.6449 + \frac{14 - \mu}{3/\sqrt{9}}\right) = 1 - G\left(15.6449 - \mu\right).$$

For $\mu = 13, 14, 15, 16, 17$ har styrkefunskjonen verdiene i følgende tabell.

μ	$\gamma(\mu)$
13	0.0041
14	0.0500
15	0.2595
16	0.6388
17	0.9123

Figuren til venstre viser et plott av $\gamma(\mu)$ for $12 \leq \mu \leq 18$, med de fem verdiene markert.



For at sannsynligheten for type-II feil skal være 0.1 eller mindre når $\mu = 16$, må vi ha

$$
\begin{aligned}
1 - \gamma(16) &\leq 0.1 \\
\gamma(16) &\geq 0.9 \\
1 - G\left(z_{0.05} + \frac{14-16}{3/\sqrt{n}}\right) &\geq 0.9 \\
z_{0.05} + \frac{14-16}{3/\sqrt{n}} &\leq -z_{0.10} \\
\frac{-2\sqrt{n}}{3} &\leq -z_{0.10} - z_{0.05} \\
\frac{2\sqrt{n}}{3} &\geq z_{0.10} + z_{0.05} \\
n \geq \left(\frac{3\,(z_{0.01} + z_{0.05})}{2}\right)^2 &= 19.27.
\end{aligned}
$$

I praksis må vi derfor ha $n \geq 20$ for at kravet skal være oppfylt. Figuren til høyre viser et plott av $\gamma(16)$ for $10 \leq n \leq 30$.

6.21 (19). Utfra observasjonene $x_1, x_2, \ldots, x_9$ har vi

$$\bar{x} = 103.78, \qquad s^2 = 8.6944 = 2.9486^2 \quad \text{og} \quad n = 9.$$

Anta at X er normalfordelt med forventingsverdi μ og standardavvik σ. Hypotesene som skal testes mot hverandre er

$$H_0: \ \mu \leq \mu_0, \quad H_1: \ \mu > \mu_0$$

hvor $\mu_0 = 100$. Under H_0 er

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$$

t-fordelt med $n - 1 = 8$ frihetsgrader. Vi forkaster H_0 hvis $t > t_{8,0.05} = 1.8595$. Observert verdi er

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{103.78 - 100}{2.9486/\sqrt{9}} = 3.8436.$$

Vi forkaster derfor nullhypotesen på signifikansnivå $\alpha = 0.05$. Det er altså grunnlag for å hevde at gjennomsnittlig støynivå er for høyt.

6.29 (23). La p være proporsjonen av PP-tilhengere blant alle velgerne. La X være antall PP-tilhengere blant de $n = 400$ spurte. Hypotesene som skal testes er

$$H_0: \ p = p_0, \quad H_0: \ p \neq p_0,$$

hvor $p_0 = 0.15$. Anta at X er binomisk fordelt med parametre np og varians $np(1-p)$. Under H_0 er testobservatoren

$$Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p(1-p)/n}}$$

tilnærmet standard normalfordelt, og vi forkaster H_0 på signifikansnivå $\alpha = 0.05$ dersom $|z| > z_{\alpha/2} = z_{0.025} = 1.96$. Observert verdi er

$$z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} = \frac{72/400 - 0.15}{\sqrt{0.15(1-0.15)/400}} = 1.6803,$$

så H_0 beholdes på signifikansnivå 0.05. Det vil si at testen ikke gir grunnlag for å si at oppslutningen til PP er endret. Testens p-verdi er

$$\begin{aligned} P(|Z| > z) = P(Z > z) + P(Z < -z) = 2P(Z \leq -z) = \\ = 2G(-1.6803) = 2 \cdot 0.0468 = 0.0929. \end{aligned}$$