ØVINGER 2017

Løsninger til oppgaver

Øving 2

3.1

Myntkast

For et enkelt myntkast har vi to mulige utfall, M og K. Utfallsrommet blir

$$S = \{M, K\}.$$

Med to etterfølgende myntkast blir utfallsrommet

$$S = \{MM, MK, KM, KK\},$$

hvor MM betyr at vi kaster mynt to ganger, MK betyr at vi først kaster mynt, deretter kron, og så videre.

Terningkast

Utfallsrommet er

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

At terningen viser partall kan identifiseres med hendelsen

$$A = \{e \in S : e \text{er et partall}\} = \{2, 4, 6\}.$$

To terninger

Med to terninger blir utfallsrommet

$$S = \{11, 12, 13, \ldots, 66\},$$

det vil si alle kombinasjoner ij hvor i og j begge er elementer i $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Det er seks mulige verdier av i, og seks mulige verdier for j, så totalt er det $|S| = 6^2 = 36$ utfall.

Mengden som svarer til at begge terningene er like er

$$A = \{ij \in S : i = j\} = \{11, 22, 33, 44, 55, 66\}.$$

Mengden som svarer til at vi får minst en sekser er

$$B = \{ij \in S : i = 6 \text{ eller } j = 6\} =$$
$$= \{ij \in S : i = 6\} \cup \{ij \in S : j = 6\} =$$
$$= \{61, 62, 63, 64, 65, 66\} \cup \{16, 26, 36, 46, 56, 66\} =$$

$$= \{61, 62, 63, 64, 65, 66, 16, 26, 36, 46, 56\}.$$

Av $|S| = 36$ mulige utfall er det $|B| = 11$ utfall som gir oss minst en sekser. Sannsynligheten for å få minst en sekser er dermed

$$P(B) = \frac{\text{Antall gunstige utfall}}{\text{Antall mulige utfall}} = \frac{11}{36} = 0.3056.$$

Politisk meningsmåling

Med utgangspunkt i kategoriene som er listet opp i Tabell 2.1, har vi utfallsrommet

$$S = \{\text{RV}, \text{SV}, \text{AP}, \text{SP}, \text{V}, \text{KrF}, \text{H}, \text{FrP}, \text{Andre}\}.$$

Anta at sentrumspartiene er SP, V og KrF. Da identifiserer vi hendelsen *Personen er sentrumsvelger* med delmengden

$$A = \{\text{SP}, \text{V}, \text{KrF}\}.$$

Landskamp

Utfallsrommet er

$$S = \{i - j : i \in \{0, 1, 2, \ldots\}, j \in \{0, 1, 2, \ldots\}\} =$$
$$= \{0 - 0, 1 - 0, 0 - 1, 1 - 1, 2 - 0, 0 - 2, 2 - 1, 1 - 2, 2 - 2, \ldots\},$$

altså alle kombinasjoner av $i - j$ hvor i og j er ikke-negative heltall. Vi får samme utfallsrom for andre spill som ikke har noen øvre grense for antall mål. Hendelsen *uavgjort* tilsvarer delmengden av S hvor lagene har like mange mål,

$$A = \{i - j \in S : i = j\} = \{0 - 0, 1 - 1, 2 - 2, \ldots\}.$$

Antall barn

Selv om antall barn i praksis er begrenset oppad, velger vi utfallsrommet

$$S = \{0, 1, 2, \ldots\}$$

slik at vi slipper å sette en vilkårlig øvre grense.

Hendelsen *mer enn fire barn* tilsvarer delmengden

$$A = \{e \in S : e > 4\} = \{5, 6, 7, \ldots\}.$$

Temperaturmåling

Hvis vi runder av temperaturmålingen til nærmeste hele grad, kan vi betrakte de mulige utfallene som heltall. Nesbyen har tidligere opplevd temperaturer mellom

$-38.0°\text{C}$ og $35.6°\text{C}$, så for å være rimelig sikre på å dekke alle mulige utfall velger vi utfallsrommet

$$S = \{-40, -39, -38, \ldots, 40\}.$$

Anta at vi har *kortbuksevær* når temperaturen er større enn eller lik 18°C. Da defineres hendelsen *kortbuksevær* som

$$A = \{e \in S : e \geq 18\} = \{18, 19, 20, \ldots, 40\}.$$

3.4. Revisoren kontrollerer en av seks permer. Alle permene velges med like stor sannsynlighet. La utfallsrommet S bestå av de seks permene, og la A være hendelsen *De tvilsomme transaksjonene avsløres.* Da består A kun av permen med de inkriminerende bilagene, mens komplimentet $\overline{A}$ består av de fem andre permene. Sannsynligheten for at de tvilsomme transaksjonene blir avslørt er da lik sannsynligheten for at revisoren velger riktig perm,

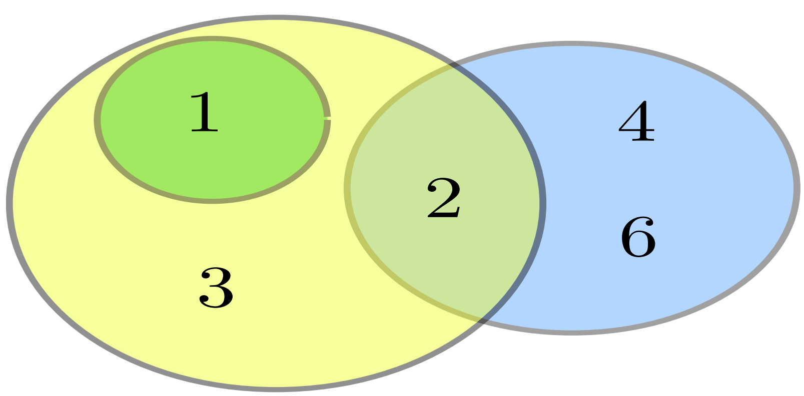
$$P(A) = \frac{\text{Antall gunstige utfall}}{\text{Antall mulige utfall}} = \frac{1}{6}.$$

3.6. La 1 bety at terningen viser ett øye, 2 at den viser to øyne, og så videre. Da er utfallsrommet

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

og hendelsene A, B og C er definert som følger:

$$A = \{1\}, \quad B = \{2, 4, 6\}, \quad C = \{1, 2, 3\}.$$



Venn-diagrammet viser at A er en delmengde av C, og at 2 er et element i både B og C.

- $A \cup B$ er unionen av A og B.

$$A \cup B = \{1\} \cup \{2, 4, 6\} = \{1, 2, 4, 6\}$$

Hendelsen $A \cup B$ inntreffer både dersom vi får en ener og dersom vi får et partall. Sannsynligheten for dette er

$$P(A \cup B) = P(\{1, 2, 4, 6\}) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

- $\overline{A \cap C}$ er komplementet til snittet av A og C, altså alle utfall som ikke er felles for A og C.

$$\overline{A \cap C} = \overline{\{1\} \cap \{1, 2, 3\}} = \overline{\{1\}} = \{2, 3, 4, 5, 6\}$$

Hendelsen $A \cap C$ inntreffer kun dersom vi får en ener, så komplementet $\overline{A \cap C}$ inntreffer i alle andre tilfeller, og har sannsynlighet

$$P(\overline{A \cap C}) = P(\{2, 3, 4, 5, 6\}) = \frac{5}{6}.$$

- $A \cup \overline{B}$ er unionen av A og komplementet til B, alstå alle utfall som enten er i A eller ikke er i B.

$$A \cup \overline{B} = \{1\} \cup \overline{\{2, 4, 6\}} = \{1\} \cup \{1, 3, 5\} = \{1, 3, 5\}$$

Hendelsen $A \cup \overline{B}$ inntreffer dersom vi får et oddetall. Det skjer med sannsynlighet

$$P(A \cup \overline{B}) = P(\{1, 3, 5\} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

- $A \cup B \cup C$ er unionen av alle tre hendelsene A, B og C, alstå alle utfall som er i minst en av hendelsene.

$$A \cup B \cup C = \{1\} \cup \{2, 4, 6\} \cup \{1, 2, 3\} = \{1, 2, 3, 4, 6\}$$

Hendelsen $A \cup B \cup C$ inntreffer dersom vi får en ener eller dersom terningen viser tre eller mindre eller dersom vi får et partall. Det eneste utfallet som ikke hører til denne hendelsen er en femmer. Sannsynligheten for at hendelsen inntreffer er

$$P(A \cup B \cup C) = P(\{1, 2, 3, 4, 6\}) = \frac{5}{6}.$$

- $A \cap \overline{B}$ er snittet av A og komplementet til B, altså den delen av A som ikke overlapper med B. Siden A og B ikke overlapper er dette snittet identisk med A.

$$A \cap \overline{B} = \{1\} \cap \overline{\{2,4,6\}} = \{1\} \cap \{1,3,5\} = \{1\}$$

Hendelsen $A \cap \overline{B}$ inntreffer kun dersom vi får en ener. Sannsynligheten for det er

$$P(A \cap \overline{B}) = P(\{1\}) = \frac{1}{6}.$$

- $\overline{A \cap C} \cap \overline{B}$ er snittet av komplimentet til B og komplimentet til snittet av A og C. Utfallene i denne mengden er verken elementer i B eller elementer i både A og C.

$$\overline{A \cap C} \cap \overline{B} = \overline{\{1\} \cap \{1,2,3\}} \cap \overline{\{2,4,6\}} = \overline{\{1\}} \cap \{1,3,5\} =$$
$$= \{2,3,4,5,6\} \cap \{1,3,5\} = \{3,5\}$$

Hendelsen $\overline{A \cap C} \cap \overline{B}$ inntreffer dersom vi får en treer eller en femmer. Sannsynligheten for dette er

$$P(\overline{A \cap C} \cap \overline{B}) = P(\{3,5\}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

3.11 (10) Vi vil finne sannsynligheten for at XF4 eller XV5 eller begge blir suksesser. Med notasjonen i oppgaveteksten tilsvarer dette unionen $A \cup B$. Hendelsene A og B er ikke disjunkte, så vi må bruke den generelle addisjonsregelen,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) =$$
$$= 0.08 + 0.06 - 0.005 = 0.135.$$

3.12 (11). La ij betegne utfallet hvor den første terningen viser i øyne og den andre viser j øyne. La S være utfallsrommet med de 36 mulige utfallene. Da er hendelsene A og B definert som følger:

$$A = \{ij \in S : i + j = 7\} = \{16, 25, 34, 43, 52, 61\}$$

og

$$B = \{ij \in S : i = 6\} \cup \{ij \in S : j = 6\} =$$
$$= \{61, 62, 63, 64, 65, 66\} \cup \{16, 26, 36, 46, 56, 66\} =$$
$$= \{61, 62, 63, 64, 65, 66, 16, 26, 36, 46, 56\}.$$

Siden A har seks utfall av 36 mulige, blir sannsynligheten

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

Av de 11 utfallene i B er det kun to (61 og 16) som også inngår i A, så sannsynligheten for A gitt B må være $P(A|B) = 2/11$. Alternativt kan vi finne sannsynlighetene $P(B) = 11/36$ og $P(A \cap B) = 2/36$ ved å telle antall gunstige utfall, og deretter sette disse inn i definisjonen av betinget sannsynlighet

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{11}{36}} = \frac{2}{11}.$$

Det at B inntreffer, øker sannsynligheten for å få sum lik sju fra $1/6 \approx 0.167$ til $2/11 \approx 0.182$.

3.13 (12). Totalt antall elever er $13 + 15 = 28$. Antall elever som kan bruke datamaskin er $6 + 10 = 16$. Sannsynligheten for at en tilfeldig valgt elev kan bruke datamaskin er

$$P(D) = \frac{16}{28} \approx 0.57.$$

Det er seks elever som både er jenter og kan bruke datamaskin, så sannsynligheten for at en tilfeldig valgt elev er en av disse er

$$P(J \cap D) = \frac{6}{28} \approx 0.21.$$

Sannsynligheten for at en tilfeldig valgt elev kan bruke datamaskin gitt at eleven er jente, er

$$P(D|J) = \frac{P(J \cap D)}{P(J)} = \frac{\frac{6}{28}}{\frac{13}{28}} = \frac{6}{13} \approx 0.46.$$

Vi kunne også regnet ut denne sannsynligheten direkte, ved å merke oss at seks av de 13 jentene i klassen kan bruke datamaskin.

Vi trekker to elever uten tilbakelegging, og vi bryr oss ikke om rekkefølgen. For at ingen av de to skal kunne bruke datamaskin, må vi trekke to av de 12 elevene i klassen som ikke kan bruke datamaskin. Dette kan gjøres på $\binom{28}{12}$ forskjellige måter. Trekning av to elever fra klassen på 28 kan gjøres på $\binom{28}{2}$ ulike måter. Sannsynligheten for å trekke to elever som ikke kan bruke datamaskin er dermed

$$\frac{\binom{12}{2}}{\binom{28}{2}} \approx 0.175.$$

For trekke en gutt og en jente som begge kan bruke datamaskin, må vi trekke en av ti gutter og en av seks jenter som kan bruke datamaskin. Dette kan gjøres p henholdsvis $\binom{10}{1}$ og $\binom{6}{1}$ måter. Antall mulige utfall er fortsatt $\binom{28}{2}$, så sannsynligheten for å trekke to elever som begge kan bruke datamaskin, og som har forskjellig kjønn, er

$$\frac{\binom{10}{1}\binom{6}{1}}{\binom{28}{2}} \approx 0.159.$$