ØVINGER 2017

Løsninger til oppgaver

Øving 4

3.30 (26). Loddtrekning uten tilbakelegging fra n enheter gir $n!$ ulike mulige rekkefølger. Med 89 påmeldte får vi $89! \approx 1.65 \cdot 10^{136}$ mulige startrekkefølger.

3.31 (27). F or at det ikke skal være feil på noen av bilene i utvalget, må alle 100 bilene i utvalget plukkes fra de $3000 - 38$ feilfrie bilene. Dette kan gjøres på $\binom{3000-38}{100}$ ulike måter. Antall mulige forskjellige utvalg av 100 biler fra 3000 er $\binom{3000}{100}$. Sannsynligheten for at utvalget ikke inneholder noen biler med feil er altså

$$\frac{\textit{Antall gunstige utfall}}{\textit{Antall mulige utfall}} = \frac{\binom{3000-38}{100}}{\binom{3000}{100}} = 0.274.$$

A.6. Vi definerer først hendelsene A og B slik oppgaven foreslår. Vi lar med andre ord A være hendelsen *en pasient er under 65 år*, og vi lar B være hendelsen *det foretas videre utredning*. I tillegg bruker vi notasjonen A^c i stedet for $\overline{A}$ for komplementet til A. Tabellen i oppgaven gir oss de fire sannsynlighetene

$$P(A \cap B) = 0.321,\ P(A \cap B^c) = 0.124,\ P(A^c \cap B) = 0.365, P(A^c \cap B^c) = 0.190.$$

a) Sannsynligheten for at en pasient er under 65 år er

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c) = 0.321 + 0.124 = 0.445.$$

b) Hendelsen $A \cup A^c$ intreffer for pasienter som enten er under 65 år gamle, eller ikke er under 65 år gamle. Det vil si alle pasienter. Siden unionen $A \cup A^c$ tilsvarer hele utfallsrommet S, så er $D = B \cap (A \cup A^c)$ snittet mellom B og hele utfallsrommet, slik at D og B er samme hendelse, $D = B \cap S = B$. Denne hendelsen inntreffer dersom det foretas videre utredning av pasienten. Sannsynligheten for dette er

$$P(D) = P(B) = P(A \cap B) + P(A^c \cap B) = 0.321 + 0.365 = 0.686.$$

c) Sannsynligheten for at det ikke foretas videre utredning gitt at pasienten ikke er under 65 år er

$$P(B^c|A^c) = \frac{P(A^c \cap B^c)}{P(A^c)} = \frac{P(A^c \cap B^c)}{1 - P(A)} = \frac{0.190}{1 - 0.445} = 0.3423.$$

Dersom A og B er uavhengige hendelser, så gjelder $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Her har vi $P(A \cap B) = 0.321$, mens $P(A)P(B) = 0.445 \cdot 0.686 = 0.3053$, så A og B kan ikke være uavhengige.

d) Spørsmålet om hvorvidt videre utredning foretas oftere på eldre pasienter enn på alle pasientene uavhengig av alder, kan besvares ved å sammenligne den betingede sannsynligheten $P(B|A^c)$ med den marginale sannsynligheten $P(B)$. merk at vi her likestiller *eldre pasienter* med *pasienter som ikke er under 65 år*. Hvis vi finner at $P(B|A^c) > P(B)$, så er svaret på spørsmålet at utredning foretas oftere på eldre pasienter. I motsatt fall, hvis $P(B|A^c) \leq P(B)$, så er svaret at utredning ikke foretas oftere på eldre pasienter.

Vi har fra punkt b) at $P(B) = 0.686$, og fra c) at $P(B^c|A^c) = 0.3423$. Den betingede sannsynligheten for at videre utredning utføres gitt at pasienten ikke er under 65 år, er

$$P(B|A^c) = 1 - P(B^c|A^c) = 1 - 0.3423 = 0.6577.$$

Vi har altså, $P(B|A^c) < P(B)$, slik at svaret på spørsmålet blir at utredning ikke foretas oftere på eldre pasienter.

Vi kan også finne $P(B|A^c)$ fra definisjonen av betinget sannsynlighet,

$$P(B|A^c) = \frac{P(A^c \cap B)}{P(A^c)} = \frac{P(A^c \cap B)}{1 - P(A)} = \frac{0.365}{1 - 0.445} = 0.6577.$$

A.7. Vi bruker den oppgitte notasjonen, og lar A være hendelsen *laget scoret først*, og V være hendelsen *laget vant kampen*.

1. Opplysningene i oppgaveteksten gir de fire sannsynlighetene

$$P(A) = 0.4,\ P(\overline{A}) = 0.6,\ P(V|A) = 0.7,\ P(V|\overline{A}) = 0.45.$$

2. Sannsynligheten for at laget vant kampen er

$$P(V) = P(V|A)P(A) + P(V|\overline{A})P(\overline{A}) = 0.7 \cdot 0.4 + 0.45 \cdot 0.6 = 0.55.$$

3. Sannsynligheten for at laget scoret før st gitt at de vant, er

$$P(A|V) = \frac{P(V|A)P(A)}{P(V)} = \frac{0.7 \cdot 0.4}{0.55} = 0.509.$$

4. Sannsynligheten for at laget ikke scoret først gitt at de ikke vant, er

$$P(\overline{A}|\overline{V}) = \frac{P(\overline{V}|\overline{A})P(\overline{A})}{P(\overline{V})} = \frac{\left(1 - P(V|\overline{A})\right) P(\overline{A})}{1 - P(V)} = \frac{(1 - 0.45) \cdot 0.6}{1 - 0.55} = 0.7333.$$

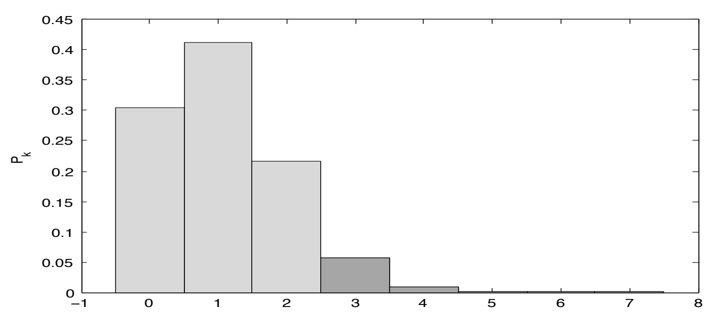
3.36 (32) For at det skal være nøyaktig en misfornøyd kunde i utvalget, må det beståav en av de sju misfornøyde kundene, og 11 av de 73 fornøyde kundene. Siden utvalget trekkes uten tilbakelegging fra populasjonen av kunder, kan dette skje på$\binom{7}{1}\binom{73}{11}$ ulike måter. Antall måter å trekke utvalget på er $\binom{80}{12}$. Sannsynligheten for at utvalget inneholder nøyaktig en misfornøyd kunde er dermed

$$\frac{\textit{Antall gunstige utfall}}{\textit{Antall mulige utfall}} = \frac{\binom{7}{1}\binom{73}{11}}{\binom{80}{12}} = 0.4135.$$

La P_k betegne sannsynligheten for at utvalget inneholder nøyaktig k misfornøyde kunder. Vi har allerede regnet ut P_1. For $0 \leq k \leq 7$ finner vi på tilsvarende måte at

$$P_k = \frac{\binom{7}{k}\binom{73}{12-k}}{\binom{80}{12}}.$$

Figuren viser P_k for $k = 0, 1, \ldots, 7$.



Sannsynligheten for at mer enn to av kundene i utvalget er misfornøyde er summen av P_k for $k > 2$ (vist med mørkere farge i figuren), eller, siden antall misfornøyde kunder i utvalget må være større enn eller lik null,

$$1 - P_0 - P_1 - P_2 =$$

$$= 1 - \frac{\binom{7}{0}\binom{73}{12}}{\binom{80}{12}} - \frac{\binom{7}{1}\binom{73}{11}}{\binom{80}{12}} - \frac{\binom{7}{2}\binom{73}{10}}{\binom{80}{12}} = 0.0648.$$

3.41 (37). Dersom alle de 50 personene har forskjellige fødselsdager, så finnes det ifølge permutasjonsregelen $P_{365,50} = 365!/315!$ måter å ordne de 50 ulike datoene på. Totalt gir potensregelen 365^{50} mulige utfall for fødselsdagene til de 50 personene. Sannsynligheten for at ingen deler fødselsdag er dermed

$$\frac{\textit{Antall gunstige utfall}}{\textit{Antall mulige utfall}} = \frac{P_{365,50}}{365^{50}} = \frac{365!}{315! \cdot 365^{50}} = 0.029626,$$

slik at sannsynligheten for at minst to av personene deler fødselsdag, er

$$1 - \frac{365!}{315! \cdot 365^{50}} = 1 - 0.029626 = 0.970374.$$