ØVINGER 2017

Løsninger til oppgaver

Øving 5

4.1. Hvert myntkast har utfallene M og K. Ved to kast blir utfallsrommet

$$S = \{MM, MK, KM, KK\}.$$

Verdimengden til X er $V_X = \{0, 1, 2\}$. Det er kun utfallet MM som gir verdien $X = 0$, og kun KK som gir $X = 2$, mens de to resterende utfallene gir $X = 1$. Sannsynlighetsfordelingen til X er derfor som gitt i følgende tabell:

x	$P(X = x)$
0	1/4
1	1/2
2	1/4

Forventningsverdien til X er

$$E[X] = \sum_{x=0}^{2} xP(X = x) = 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} = 1.$$

4.2. Summen X av øyne ved kast av tre terninger har verdimengden $V_X = \{3, 4, \ldots, 18\}$. Sannsynlighetshistogrammet vil være symmetrisk om midtpunktet $(3 + 18)/2 = 10.5$, siden vi har $P(X = 3) = P(X = 18)$, $P(X = 4) = P(X = 17)$, og så videre. Dette midtpunktet vil også være forventningsverien; $E[X] = 10.5$. Sannsynligheten for at X er mindre enn 11 er

$$P(X < 11) = P(X < 10.5) = \frac{1}{2}$$

på grunn av symmetrien i sannsynlighetshistogrammet.

4.3. Antall seksere Y ved kast av tre terninger, har verdimengde $V_Y = \{0, 1, 2, 3\}$. Hver terning blir en sekser med sannsynlighet $1/6$, og en ikke-sekser med sannsynlighet $5/6$. For å få null seksere må alle terningene bli ikke-seksere. Sannsynligheten for det er

$$P(Y = 0) = \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 0.5787.$$

For å få en sekser må en av terningene bli en sekser, og to av terningene bli ikke-seksere. Dette kan skje på tre ulike måter. Sannsynligheten for å få en sekser er

$$P(Y=1) = 3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 = 0.3472.$$

For å få to seksere må to av terningene bli seksere, og den siste en ikke-sekser. Dette kan også skje på tre måter, og inntreffer med sannsynlighet

$$P(Y=2) = 3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{5}{6} = 0.0694.$$

Sannsynligheten for å få tre seksere er

$$P(Y=3) = \left(\frac{1}{6}\right)^3 = 0.0046.$$

Vi oppsummerer sannsynlighetsfordelingen til Y i en tabell:

y	$P(Y=y)$
0	0.5787
1	0.3472
2	0.0694
3	0.0046

4.4. Verdimengden til Z er $V_Z = \{1, 2, \ldots\}$. Null utelates fordi vi tidligst kan vinne ved neste trekning, hvilket i så fall gir $Z = 1$. Sannsynligheten for at lykketallet trekkes i første uke er $P(Z=1) = 7/34$. For at lykketallet først skal trekkes i andre uke kan det ikke bli trukket i første uke. Sannsynligheten for at lykketallet trekkes i andre uke er derfor

$$P(Z=2) = \left(1 - \frac{7}{34}\right)\frac{7}{34}.$$

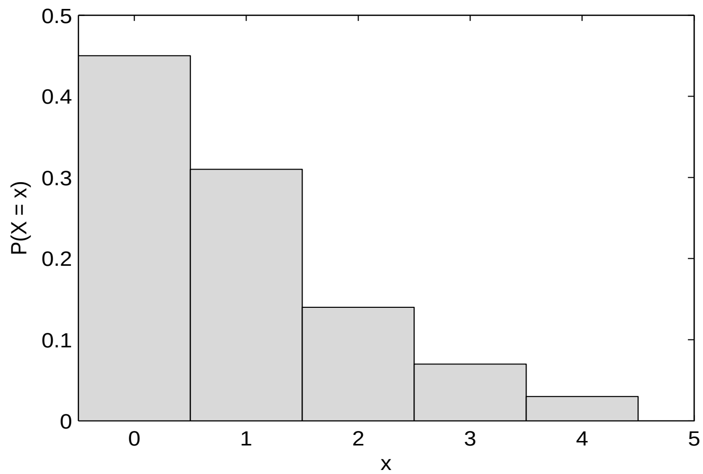
Tilsvarende er sannsynligheten for at lykketallet trekkes i tredje uke

$$P(Z=3) = \left(1 - \frac{7}{34}\right)^2 \frac{7}{34},$$

og generelt har vi

$$P(Z=z) = \left(1 - \frac{7}{34}\right)^{z-1} \frac{7}{34}.$$

4.5. Figuren viser et sannsynlighetshistogram for X.



Forventningsverdien til X er

$$E[X] = \sum_{x=0}^{4} xP(X = x) = 0 \cdot 0.45 + 1 \cdot 0.31 + 2 \cdot 0.14 + 3 \cdot 0.07 + 4 \cdot 0.03 = 0.92,$$

og variansen er

$$Var[X] = \sum_{x=0}^{4} (x - E[X])^2 P(X = x) =$$

$$= (0 - 0.92)^2 \cdot 0.45 + (1 - 0.92)^2 \cdot 0.31 + (2 - 0.92)^2 \cdot 0.14+$$

$$+(3 - 0.92)^2 \cdot 0.07 + (4 - 0.92)^2 \cdot 0.03 =$$

$$= 0.92^2 \cdot 0.45 + 0.08^2 \cdot 0.31 + 1.08^2 \cdot 0.14 + 2.08^2 \cdot 0.07 + 3.08^2 \cdot 0.03 = 1.1336.$$

Sannsynligheten for at X er større enn to er

$$P(X > 2) = P(X = 3) + P(X = 4) = 0.07 + 0.03 = 0.10,$$

og sannsynligheten for at X er mindre enn to er

$$P(X < 2) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0.45 + 0.31 = 0.76.$$

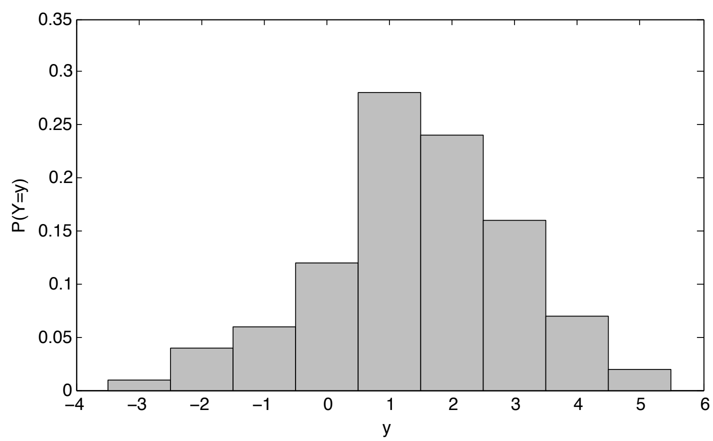
4.6. Vi beregner den kumulative fordelingen som

$$F(y) = P(Y \leq y) = \sum_{k=-3}^{y} P(Y = k)$$

og setter dette inn i tabellen.

y	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$P(Y = y)$	0.01	0.04	0.06	0.12	0.28	0.24	0.16	0.07	0.02
$F(y)$	0.01	0.05	0.11	0.23	0.51	0.75	0.91	0.98	1.0

Sannsynlighetshistogrammet tegner vi ved å la søylene ha en enhets bredde, og høyde bestemt av $P(Y = y)$.



Forventningsverdien til Y er

$$E[Y] = \sum_{y=-3}^{5} yP(Y = y) = 1.45,$$

forventningsverdien til Y^2 er

$$E[Y^2] = \sum_{y=-3}^{5} y^2 P(Y = y) = 4.61,$$

og variansen til Y er

$$Var[Y] = E[Y^2] - E[Y]^2 = 4.61 - 1.45^2 = 2.5075.$$

Sannsynligheten $P(0 < Y \leq 4)$ finner vi fra $F(y)$-verdiene ved å ta

$$P(0 < Y \leq 4) = P(Y \leq 4) - P(Y \leq 0) = F(4) - F(0) = 0.98 - 0.23 = 0.75.$$