ØVINGER 2017

Løsninger til oppgaver

Øving 6

4.10 (7). Fra oppgave 4.5 (øving 4) har vi forventningsverdien og variansen til X,

$$E[X] = 0.92, \quad Var[X] = 1.13.$$

Lineærkombinasjonen $Z = -5X + 8Y$ har forventningsverdi

$$E[Z] = -5E[X] + 8E[Y] = -5 \cdot 0.92 + 8 \cdot 1.45 = 7.0,$$

og, forutsatt at X og Y er uavhengige, varians

$$Var[Z] = (-5)^2 Var[X] + 8^2 Var[Y] = 25 \cdot 1.13 + 64 \cdot 2.5075 = 188.73.$$

4.11 (8). Fra eksempel 3.8 har vi sannsynligheten $P(G) = 0.514$ for å få en gutt, som betyr at sannsynligheten for å få en jente er $P(J) = 1 - P(G) = 1 - 0.514 = 0.486$. Vi lar fortsatt Y være antall jenter blant de fire barna. Sannsynligheten for å få null jenter er

$$P(Y = 0) = P(G)^4 = 0.514^4 = 0.0698,$$

siden dette kun kan skje på en måte. Sannsynligheten for å få en jente er

$$P(Y = 1) = \binom{4}{1} P(J)P(G)^3 = 4 \cdot 0.486 \cdot 0.514^3 = 0.26399$$

siden dette kan skje på $\left(\begin{array}{c} 4 \\ 1 \end{array}\right)$ måter. På samme måte finner vi at sannsynligheten for å få to jenter er

$$P(Y = 2) = \left(\begin{array}{c} 4 \\ 2 \end{array}\right) P(J)^2 P(G)^2 = 6 \cdot 0.468^2 \cdot 0.514^2 = 0.37441,$$

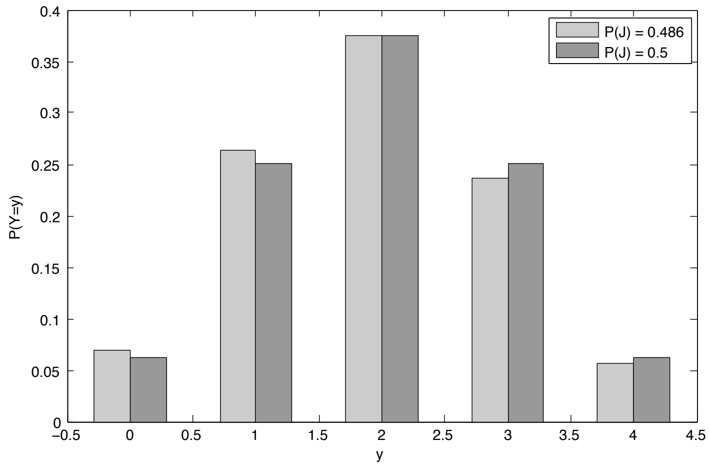
mens sannsynligheten for å få tre jenter er

$$P(Y = 3) = \left(\begin{array}{c} 4 \\ 3 \end{array}\right) P(J)^3 P(G) = 4 \cdot 0.486^3 \cdot 0.514 = 0.23601,$$

og sannsynligheten for å få fire jenter er

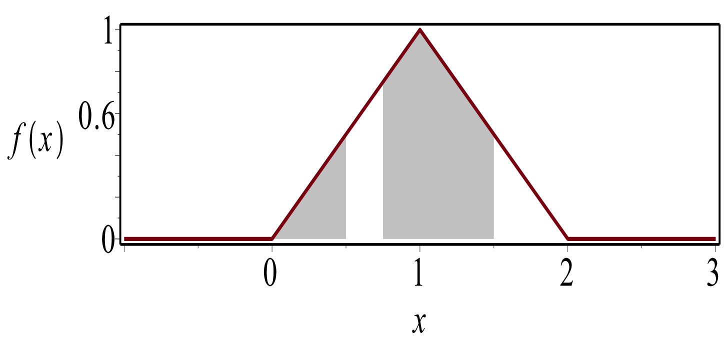
$$P(Y = 4) = P(J)^4 = 0.486^2 = 0.055789.$$

Vi vil sammenligne denne sannsynlighetsfordelingen med den opptinnelige fordelingen fra eksempel 4.2, hvor sannsynlighetene er beregnet med $P(G) = P(J) = 0.5$.



Det grupperte søylediagrammet har søyler med høyder tilsvarende $P(Y = y)$, for $0 \leq y \leq 4$, fra begge fordelingene. Den mer nøyaktige sannsynlighetsfordelingen er forskjøvet litt mot venstre sammenlignet med den opprinnelige fordelingen, men forskjellen er ganske liten. Hvorvidt det var verdt strevet å regne ut de nøyaktige sannsynlighetene kommer an på hva modellen skal brukes til.

4.16 (13). Sannsynlightestetthetsfunksjonen $f(x)$ ser ut som en trekant med hjørner i $(0, 0)$, $(1, 1)$ og $(2, 0)$.



Sannsynlighetene $P(X < 1/2)$ og $P(3/4 < X < 3/2)$ tilsvarer arealene av de fargelagte områdene under grafen til $f(x)$. Integrasjon av $f(x)$ gir

$$P(X < 1/2) = F(1/2) = \int_0^{1/2} f(x)dx = \int_0^{1/2} xdx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{1/2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{8} = 0.125.$$

og

$$P(3/4 < X < 3/2) = \int_{3/4}^{3/2} f(x)dx = \int_{3/4}^{1} xdx + \int_1^{3/2} (2-x)dx =$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{3/4}^{1} + \left[2x - \frac{1}{2}x^2\right]_1^{3/2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{7}{16} + 1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{4} = \frac{19}{32} = 0.59375.$$

Forventningsverdien til X er

$$E[X] = \int_0^2 xf(x)dx = \int_0^1 x^2dx + \int_1^2 (2x - x^2)dx =$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 + \left[x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_1^2 = \frac{1}{3} + 2^2 - 1^2 - \frac{1}{3}\left(2^3 - 1^3\right) = \frac{1}{3} + 3 - \frac{7}{3} = 1,$$

som man også kan se utfra symmetrien i $f(x)$. Andremomentet til X er

$$E[X^2] = \int_0^2 x^2 f(x)dx = \int_0^1 x^3dx + \int_1^2 (2x^2 - x^3)dx =$$

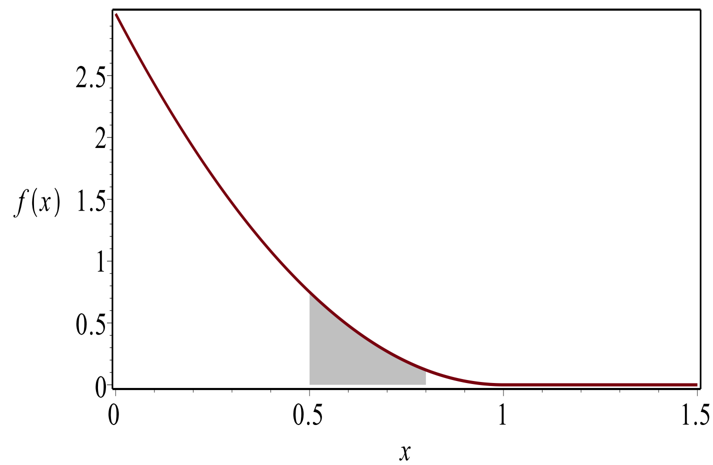
$$= \left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^1 + \left[\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right]_1^2 = \frac{1}{4} + \frac{14}{3} - \frac{15}{4} = \frac{7}{6}.$$

og variansen er

$$Var[X] = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{7}{6} - 1^2 = \frac{1}{6}.$$

4.18 (14). Figuren visier grafen til $f(x)$ for $0 < x < 1.5$. Det fargelagte området under grafen, for $0.5 < x < 0.8$, tilsvarer sannsynligheten for at X ligger mellom 0.5 og 0.8,

$$P(0.5 < X < 0.8) = \int_{0.5}^{0.8} f(x)dx = 3\int_{0.5}^{0.8} (1-x)^2dx = 3\left[-\frac{1}{3}(1-x)^3\right]_{0.5}^{0.8} = 0.117.$$



Forventningsverdien til X er

$$E[X] = \int_0^1 x f(x) dx = 3 \int_0^1 x(1-x)^2 dx = 3 \int_0^1 x \left(1 - 2x + x^2\right) dx =$$

$$= 3 \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4\right]_0^1 = 3\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4},$$

så mynten kan forventes å lande 25 cm fra veggen.

4.19 (15). Vi finner marginalfordelingen til X ved å summere simultanfordelingen over y

$$P(X = x) = \sum_{y=0}^{2} P(X = x, Y = y), \ x = 0, 1,$$

og vi finner marginalfordelingen til Y ved å summere over x,

$$P(Y = y) = \sum_{x=0}^{1} P(X = x, Y = y), \quad y = 0, 1, 2.$$

De to marginalfordelingene er

$$P(X = 0) = P(X = 0, Y = 0) + P(X = 0, Y = 1) + P(X = 0, Y = 2) =$$

$$= 0.1 + 0.1 + 0.2 = 0.4,$$

$$P(X = 1) = P(X = 1, Y = 0) + P(X = 1, Y = 1) + P(X = 1, Y = 2) =$$

$$= 0.3 + 0.2 + 0.1 = 0.6,$$

og

$$P(Y = 0) = P(X = 0, Y = 0) + P(X = 1, Y = 0) = 0.1 + 0.3 = 0.4,$$
$$P(Y = 1) = P(X = 0, Y = 1) + P(X = 1, Y = 1) = 0.1 + 0.2 = 0.3,$$
$$P(Y = 2) = P(X = 0, Y = 2) + P(X = 1, Y = 2) = 0.2 + 0.1 = 0.3.$$

Forventningsverdien og variansen til X er

$$E[X] = \sum_{x=0}^{1} xP(X = x) = P(X = 1) = 0.6$$

og

$$Var[X] = \sum_{x=0}^{1} (x - E[X])^2 P(X = x) = (0 - 0.6)^2 \cdot 0.4 + (1 - 0.6)^2 \cdot 0.6 = 0.24.$$

Forventningsverdien til Y er

$$E[Y] = \sum_{y=0}^{2} yPP(Y = y) = P(Y = 1) + 2P(Y = 2) = 0.9,$$

og variansen er

$$Var[Y] = \sum_{y=0}^{2} (y - E[Y])^2 P(Y = y) =$$
$$= (0 - 0.9)^2 \cdot 0.4 + (1 - 0.9)^2 \cdot 0.3 + (2 - 0.9)^2 \cdot 0.3 =$$
$$= 0.9^2 \cdot 0.4 + 0.1^2 \cdot 0.3 + 1.1^2 \cdot 0.3 = 0.69.$$

Dersom X og Y er uavhengige, så er

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$$

for $x \in \{0, 1\}$ og $y \in \{0, 1, 2\}$. Vi tester med $x = y = 0$, og finner at produktet av de marginale sannsynlighetene er

$$P(X = 0)P(Y = 0) = 0.4 \cdot 0.4 = 0.16,$$

mens den simultane sannsynligheten er $P(X = 0, Y = 0) = 0.1$. Altså kan ikke X og Y være uavhengige. Siden verdien av X er mellom 0 og 1, og verdien av Y er mellom 0 og 2, så må verdien av differansen $W = Y - X$ være mellom -1 og 2. Sannsynlighetsfordelingen til W er

$$P(W = -1) = P(X = 1, Y = 0) = 0.3,$$

$$P(W=0)=P(X=0,Y=0)+P(X=1,Y=1)=0.1+0.2=0.3,$$
$$P(W=1)=P(X=0,Y=1)+P(X=1,Y=2)=0.1+0.1=0.2,$$
$$P(W=2)=P(X=0,Y=2)=0.2.$$

Forventningsverdien til W er

$$E[W]=\sum_{w=-1}^{2} wP(W=w)=-P(W=-1)+P(W=1)+2P(W=2)=$$
$$=-0.3+0.2+2\cdot 0.2=0.3,$$

og forventningsverdien til W^2 er

$$E[W^2]=\sum_{w=-1}^{2} w^2P(W=w)=P(W=-1)+P(W=1)+4P(W=2)=$$
$$=0.3+0.2+4\cdot 0.2=1.3.$$

Variansen til W er dermed

$$Var[W]=E[W^2]-E[W]^2=1.3-0.3^2=1.21.$$

4.20 (16). a) Simultanfordelingen i tabell 4.8 gjelder for $0\le x\le 7$ og $0\le y\le 4$. For å regne ut sannsynligheten for at $X=Y$, summerer vi sannsynlighetene $P(X=k,Y=k)$ for k mellom 0 og 4,

$$P(X=Y)=\sum_{k=0}^{4} P(X=k,Y=k)=0.09+0.09+0.07+0.01+0=0.26.$$

For å finne sannsynligheten $X-Y=5$ summerer vi $P(X=k,Y=k-5)$ over alle gyldige verdier av k, altså de som oppfyller både $0\le k\le 7$ og $0\le k-5\le 4$, som er ekvivalent med $5\le k\le 9$. De gyldige verdiene av k er derfor $5\le k\le 7$, og sannsynligheten for at $X-Y=5$ er

$$P(X-Y=5)=\sum_{k=5}^{7} P(X=k,Y=k-5)=$$
$$=P(X=5,Y=0)+P(X=6,Y=1)+P(X=7,Y=2)=$$
$$=0.01+0.01+0=0.02.$$

Sannsynligheten for at produktet XY er mindre enn eller lik fire er

$$P(XY \leq 4) = \sum_{xy \leq 4} P(X = x, Y = y) =$$

$$= P(0,0) + P(1,0) + P(1,1) + P(2,0) + P(2,1) + P(2,2) +$$

$$+ P(3,0) + P(3,1) + P(4,0) + P(4,1) + P(5,0) =$$

$$= 0.09 + 0.11 + 0.09 + 0.07 + 0.12 + 0.07 +$$

$$+ 0.05 + 0.09 + 0.01 + 0.03 + 0.01 = 0.74,$$

der $P(x, y)$ er en forenklet skrivemåte for $P(X = x, Y = y)$, og kombinasjoner av x og y med $P(x, y) = 0$ er utelatt. Sannsynligheten for at XY er større enn fire er nå

$$P(XY > 4) = 1 - P(XY \leq 4) = 1 - 0.74 = 0.26.$$

b) Verdimengden til $Z = X + Y$ er $V_Z = \{0, 1, \ldots, 11\}$, siden $V_X = \{0, 1, \ldots, 7\}$ og $V_Y = \{0, 1, \ldots, 4\}$. Sannsynligheten for at $Z = 3$ er

$$P(Z = 3) = P(X + Y = 3) = \sum_{k=0}^{3} P(X = k, Y = 3 - k) =$$

$$= P(X = 0, Y = 3) + P(X = 1, Y = 2) + P(X = 2, Y = 1) + P(X = 3, Y = 0) =$$

$$= 0 + 0 + 0.12 + 0.05 = 0.17.$$

Ved å bruke samme metode, finner vi sannsynlighetsfordelingen til Z,

$$P(Z = z) = P(X + Y = z) = \sum_{k=0}^{z} P(X = k, Y = z - k).$$

z	$P(Z = z)$
0	0.09
1	0.11
2	0.16
3	0.17
4	0.17
5	0.07
6	0.07
7	0.06
8	0.03
9	0.03
10	0.03
11	0.01

Forventningsverdien til Z er

$$E[Z] = \sum_{z=0}^{11} zP(Z = z) = 0 \cdot 0.09 + 1 \cdot 0.11 + \ldots + 11 \cdot 0.01 = 3.73,$$

og forventningsverdien til Z^2 er

$$E[Z^2] = \sum_{z=0}^{11} z^2 P(Z = z) = 0^2 \cdot 0.09 + 1^2 \cdot 0.11 + \ldots + 11^2 \cdot 0.01 = 20.77,$$

slik at variansen er

$$Var[Z] = E[Z^2] - E[Z]^2 = 20.77 - 3.73^2 = 6.8571.$$

c) Vi beregner forventningsverdi og varians til X og Y utfra de marginale sannsynlighetene opgitt i tabellen. Forventningsverdiene er

$$E[X] = \sum_{x=0}^{7} xP(X = x) = 0 \cdot 0.09 + 1 \cdot 0.20 + \ldots + 7 \cdot 0.03 = 2.61$$

og

$$E[Y] = \sum_{y=0}^{4} yP(Y = y) = 0 \cdot 0.34 + 1 \cdot 0.35 + ... + 4 \cdot 0.03 = 1.12,$$

mens variansene er

$$Var[X] = \sum_{x=0}^{7} (x - E[X)^2 \, P(X = x) =$$

$$= (0 - 2.61)^2 \cdot 0.09 + (1 - 2.61)^2 \cdot 0.20 + \ldots + (7 - 2.61)^2 \cdot 0.03 = 3.0779.$$

og

$$Var[Y] = \sum_{y=0}^{4} yP(Y = y) =$$

$$= (0 - 1.12)^2 \cdot 0.34 + (1 - 1.12)^2 \cdot 0.35 + \ldots + (4 - 1.12)^2 \cdot 0.03 = 1.1456.$$

d) Fra b) har vi $E[Z] = 3.73$. Til sammenligning er

$$E[X] + E[Y] = 2.61 + 1.12 = 3.73.$$

Vi har altså

$$E[Z] = E[X + Y] = E[X] + E[Y],$$

i overensstemmelse med regel 4.12. Den enkleste måten å finne $E[Z]$ på er å regne ut $E[X]$ og $E[Y]$ hver for seg, og deretter bruke regel 4.12. Da slipper man å finne sannsynlighetsfordelingen til Z.

e) Variansen til Z er $Var[Z] = 6.8571$. Summen av variansene til X og Y er

$$Var[X] + Var[Y] = 3.0779 + 1.1456 = 4.2235.$$

Det at $Var[Z] = Var[X+Y]$ er større enn $Var[X] + Var[Y]$ stemmer med at X og Y er positivt korrelerte, siden

$$Var[X+Y] = Var[X] + Var[Y] + 2Cov[X,Y]$$

jamførregel 4.15.

4.21 (17). Standardavvikene til X og Y er

$$\sigma_X = \sqrt{Var[X]} = \sqrt{9} = 3 \text{ og } \sigma_Y = \sqrt{Var[Y]} = \sqrt{16} = 4.$$

Korrelasjonen mellom X og Y er

$$Corr[X,Y] = \frac{Cov[X,Y]}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{5}{3 \cdot 4} = \frac{5}{12}.$$

Variablene er ikke uavhengige, for om de var det ville korrelasjonen mellom dem vært lik null. Variansen til lineærkombinasjonen $3X - 4Y$ er

$$Var[3X - 4Y] = 3^2 \cdot Var[X] + (-4)^2 \cdot Var[Y] + 2 \cdot 3 \cdot (-4) \cdot Cov[X,Y] =$$

$$= 9 \cdot 9 + 16 \cdot 16 - 24 \cdot 5 = 217.$$

4.25 (19). Forventningsverdiene til X og Y er

$$E[X] = 0 \cdot P(X=0) + 1 \cdot P(X=1) = 0 \cdot 0.4 + 1 \cdot 0.6 = 0.6.$$

og

$$E[Y] = 0 \cdot P(Y=0) + 1 \cdot P(Y=1) + 2 \cdot P(Y=2) = 0.2 + 2 \cdot 0.4 = 1.$$

Forventningsverdien til produktet XY er

$$E[XY] = \sum_{x=0}^{1} \sum_{y=0}^{2} xyP(X=x, Y=y) =$$

$$= 1 \cdot P(X=1, Y=1) + 2 \cdot P(X=1, Y=2) = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0.3 = 0.6.$$

Kovariansen til variablene er

$$Cov[X,Y] = E[XY] - E[X]E[Y] = 0.6 - 0.6 \cdot 1 = 0,$$

og dermed er også korrelasjonen lik null, siden

$$Corr[X,Y] = \frac{Cov[X,Y]}{\sqrt{Var[X]Var[Y]}}.$$

Variablene er ikke uavhengige, for vi har ikke

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y).$$

For eksempel er $P(X = 0, Y = 0) = 0.1$, mens $P(X = 0)P(Y = 0) = 0.4 \cdot 0.4 = 0.16$. Det at korrelasjonen mellom X og Y er null, betyr ikke nødvendigvis at X og Y er uavhengige.

4.27 (21). Forventningsverdien til U er

$$E[U] = 100 \cdot P(U = 100) + 180 \cdot P(U = 180) + 400 \cdot P(U = 400) =$$
$$= 0.3 \cdot 100 + 0.4 \cdot 180 + 0.3 \cdot 400 = 222,$$

og forventningsverdien til K er

$$E[K] = 1 \cdot P(K = 1) + 2 \cdot P(K = 2) = 1 \cdot 0.6 + 2 \cdot 0.4 = 1.4.$$

Når U og K antas uavhengige, har vi $Cov[U,K] = 0$, og forventet kostnad blir

$$E[T] = E[UK] = E[U]E[K] = 222 \cdot 1.4 = 310.8.$$

Hvis U og K følger simultanfordeling 1, blir den forventede kostnaden

$$E[T] = E[UK] = \sum_{u,k} ukP(U = u, K = k) =$$
$$= 180 \cdot 1 \cdot 0.30 + 400 \cdot 1 \cdot 0.30 + 100 \cdot 2 \cdot 0.30 + 180 \cdot 2 \cdot 0.10 = 270.$$

Hvis U og K følger simultanfordeling 2, blir forventet kostnad

$$E[T] = E[UK] = \sum_{u,k} ukP(U = u, K = k) =$$
$$= 100 \cdot 1 \cdot 0.30 + 180 \cdot 1 \cdot 0.30 + 180 \cdot 2 \cdot 0.10 + 400 \cdot 2 \cdot 0.30 = 360.$$

Når U og K er negativt korrelerte, som i simultanfordeling 1, blir $E[UK]$ mindre enn dersom variablene er uavhengige. Når U og K er positivt korrelerte, som i simultanfordeling 2, blir $E[UK]$ større. Dette kan forklare underbudsjettering hvis positiv korrelasjon mellom varighet og kostnad ikke tas hensyn til.

4.29 (23). La $p = 0.206$ være sannsynligheten for suksess, altså at selskapet finner en agent i en gitt uke. La Z være antall uker med leting før selskapet finner en agent. Da er sannsynlighetsfordelingen til Z gitt ved

$$P(Z = z) = (1-p)^{z-1}p, \text{ for } z = 1, 2, \dots.$$

Forventningsverdien til Z er

$$E[Z] = \sum_{z=1}^{\infty} zP(Z = z) = \sum_{z=1}^{\infty} z(1-p)^{z-1}p = \frac{p}{1-p}\sum_{z=1}^{\infty} zq^z,$$

med $q = 1 - p$. Siden

$$\sum_{n=1}^{\infty} nq^n = \frac{1}{(q-1)^2} \text{ hvis } |q| < 1$$

har vi

$$E[Z] = \frac{p}{1-p} \cdot \frac{q}{(q-1)^2} = \frac{p}{1-p} \cdot \frac{1-p}{(-p)^2} = \frac{1}{p}.$$

Setter vi inn tallverdien $p = 0.206$ får vi $E[Z] = 1/0.206 = 4.854$.