

ØVINGER 2017
Løsninger til oppgaver

Øving 8

5.12 (10). Her har antall merkede elger Y i fangsten den hypergeometriske fordelingen med $N = 640$, $M = 140$ og $n = 8$. Når vi antar at Y er hypergeometrisk fordelt med disse parametrene, får vi

$$P(Y = 3) = \frac{\binom{140}{3} \binom{500}{5}}{\binom{640}{8}} = 0.1710$$

og

$$P(Y \leq 3) = \sum_{y=0}^3 \frac{\binom{140}{y} \binom{500}{8-y}}{\binom{640}{8}} = 0.9261.$$

Dersom vi istedet antar at Y er binomisk fordelt med $n = 8$ og $p = M/N = 140/640$, får vi

$$P(Y = 3) = \binom{8}{3} \left(\frac{140}{640}\right)^3 \left(\frac{500}{640}\right)^5 = 0.1706$$

og

$$P(Y \leq 3) = \sum_{y=0}^3 \binom{8}{y} \left(\frac{140}{640}\right)^y \left(\frac{500}{640}\right)^{8-y} = 0.9249.$$

Det er liten forskjell mellom svarene vi får i de to tilfellene. Binomialfordelingen er en god tilnærming til den hypergeometriske fordelingen når populasjonen er stor nok til at proporsjonen $p = M/N$ er nesten lik for hvert forsøk, eller for hver felte elg, i dette tilfellet.

5.14 (12). Antall uker Z til lykketallet trekkes ut er geometrisk fordelt med $p = 7/34$, og punktsannsynligheten til Z er

$$P(Z = z) = (1 - p)^{z-1} p = \left(1 - \frac{7}{34}\right)^{z-1} \frac{7}{34}.$$

Sannsynligheten for at lykketallet trekkes ut først om tre uker er

$$P(Z = 3) = \left(1 - \frac{7}{34}\right)^2 \frac{7}{34} = 0.1298.$$

Forventet antall uker til lykketallet trekkes ut er

$$E[Z] = \frac{1}{p} = \frac{34}{7} = 4.8571.$$

Figur 4.5 viser den hypergeometriske fordelingen med $p = 0.206 \approx 7/34$.

5.15 (13). Antall dager X til Kari lykkes med målet sitt er geometrisk fordelt med $p = 0.001$. Forventningsverdien til X er

$$E[X] = \frac{1}{p} = \frac{1}{0.001} = 1000.$$

Sannsynligheten for at Kari lykkes i løpet av et år er

$$P(X \leq 365) = 1 - (1 - 0.001)^{365} = 1 - 0.999^{365} = 0.3059.$$

5.18 (16). Vi antar at antall ulykker X i løpet av en måned er Poissonfordelt med parameter $\lambda t = 1$. Sannsynligheten for at ingen ulykker inntreffer i løpet av en måned er

$$P(X = 0) = \frac{(\lambda t)^0}{0!} e^{-\lambda t} = e^{-1} = 0.3679.$$

Sannsynligheten for at to ulykker inntreffer i løpet av en måned er

$$P(X = 2) = \frac{(\lambda t)^2}{2!} e^{-\lambda t} = \frac{1^2}{2!} e^{-1} = \frac{1}{2} e^{-1} = 0.1839.$$

Antall ulykker Y per år er Poissonfordelt med parameter $\lambda = 12$. Sannsynligheten for at seks ulykker inntreffer i løpet av et år er

$$P(Y = 6) = \frac{(\lambda t)^6}{6!} e^{-\lambda t} = \frac{12^6}{6!} e^{-12} = 0.0255.$$

Sannsynligheten for at høyst åtte ulykker inntreffer i løpet av et år er

$$P(Y \leq 8) = 0.155,$$

og finnes i tabellen for den kumulative Poissonfordelingen. At antall ulykker er Poissonfordelt forutsetter at ulykkene kommer alene, siden forekomstene ikke kan sammenfalle på tidsaksen, og siden forventet antall ulykker i fremtiden antas å forbli uendret selv om en ulykke skulle inntreffe. Påstanden “en ulykke kommer sjelden alene” er med andre ord ikke forenlig med at X er Poissonfordelt.

5.20 (18). Sannsynligheten for at pæren ryker i løpet av 1000 timer er

$$P(T \leq 1000) = 1 - e^{-\frac{1}{\mu} \cdot 1000} = 1 - e^{-\frac{1000}{1500}} = 0.4866.$$

Sannsynligheten for at pæren overlever ett år er

$$P(T > 8760) = 1 - P(T \leq 8760) = 1 - \left(1 - e^{-\frac{8760}{\mu}}\right) = e^{-\frac{8760}{1500}} = 0.0029.$$

Sannsynligheten for at lyspæren vil lyse i 1000 timer til, gitt at den har lyst i et år er

$$\begin{aligned} P(T > 8760 + 1000 | T > 8760) &= \frac{P(\{T > 8760 + 1000\} \cap \{T > 8760\})}{P(T > 8760)} = \\ &= \frac{P(T > 8760 + 1000)}{P(T > 8760)} = \frac{e^{-\frac{8760+1000}{1500}}}{e^{-\frac{8760}{1500}}} = e^{-\left(\frac{8760+1000}{1500} - \frac{8760}{1500}\right)} = e^{-\frac{1000}{1500}} = 0.5134. \end{aligned}$$

Vi har altså $P(T > 8760 + 1000 | T > 8760) = P(T > 1000)$, så lyspæren er hukommelsesløs, og husker ikke at den allerede har lyst i et år.

5.21 (19). Antall nye kunder X i løpet av to timer er Poissonfordelt med parameter $\lambda t = 4 \cdot 2 = 8$. Sannsynligheten for at det kommer seks nye kunder i løpet av to timer er

$$P(X = 6) = \frac{(\lambda t)^6}{6!} e^{-\lambda t} = \frac{8^6}{6!} e^{-8} = 0.1221.$$

Sannsynligheten for at det kommer mellom fire og ti nye kunder i løpet av to timer er

$$P(4 \leq X \leq 10) = P(X \leq 10) - P(X \leq 3) = 0.816 - 0.042 = 0.774.$$

Tiden T til neste kunde kommer er eksponentialfordelt med forventningsverdi

$$\mu = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{4 \text{ per time}} = 0.25 \text{ timer}.$$

Sannsynligheten for at det går over en halv time til neste kunde ankommer er

$$P(T > 0.5) = 1 - P(T \leq 0.5) = 1 - \left(1 - e^{-\frac{1}{\mu} \cdot 0.5}\right) = e^{-\frac{0.5}{0.25}} = 0.1353.$$