**ØVINGER 2017**

Løsninger til oppgaver

## Øving 9

**5.25 (21).** Siden $Z$ er standard normalfordelt har vi $P(Z \leq z) = G(z)$, og ved å slå opp i tabellen finner vi

$$(P(Z < 0) = G(0) = 0.5,$$
$$(P(Z < 1.22) = G(1.22) = 0.8888,$$
$$(P(1.13 < Z < 2.45) = G(2.45) - G(1.13) = 0.9929 - 0.8708 = 0.1221,$$
$$(P(-0.87 < Z < 1.11) = G(1.11) - G(-0.87) = 0.8665 - 0.1922 = 0.6743.$$

**5.26 (22).** Sannsynligheten for at Kristines bestemor blir skuffet er

$$P(V < 180) = P\left(\frac{V-\mu}{\sigma} < \frac{180-200}{40}\right) = P(Z < -0.5) = G(-0.5) = 0.3085,$$

hvor $Z = (V - \mu)/\sigma$ er standard normalfordelt.

**5.27 (23).** Høyden $X$, i centimeter, er normalfordelt med forventningsverdi $\mu = 180$ og standardavik $\sigma = 8$, slik at

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-180}{8}$$

er standard normalfordelt, og $P(Z \leq z) = G(z)$. Fra oppslag i tabell finner vi

$$P(X < 167) = P\left(Z < \frac{167-180}{8}\right) = G(-1.625) \approx G(-1.623) = 0.0516,$$

$$P(X > 195) = P\left(Z > \frac{195-180}{8}\right) = 1 - G(1.875) \approx$$
$$\approx 1 - G(1.88) = 1 - 0.9699 = 0.0301,$$
$$P(175 < X < 182) = P(X < 182) - P(X < 175) =$$
$$= P\left(Z < \frac{182-180}{8}\right) - P\left(Z < \frac{175-180}{8}\right) =$$
$$= G(0.25) - G(-0.625) = 0.5987 - 0.2543 = 0.3344.$$

**5.31 (27). Badetemperatur**

Badetemperaturen, målt i grader, er normalfordelt med forventningsverdi $\mu = 24.8$ og standardavvik $\sigma = 2.2$. Vi vil finne en grenseverdi $t$ som er slik at

$$P(T > t) = 0.999.$$

La

$$Z = \frac{T - \mu}{\sigma}$$

slik at $Z$ er standard normalfordelt. Hvis $z$ er slik at $P(Z > z) = 0.999$, har vi da

$$P(Z \leq z) = 1 - 0.999 = 0.001.$$

Videre er $P(Z \leq z) = P(Z > -z)$ grunnet fordelingens symmetri. Dermed følger det at

$$-z = z_{0.001} = 3.09$$

slik at $z = -3.09$. Her betegner $z_\alpha$ standard normalfordelingens $\alpha$-kvantil, det vil si at vi for $0 < \alpha < 1$ har $P(Z > z_\alpha) = \alpha$. Grenseverdien $t$ for badetemperaturen finner vi nå ved å løse

$$z = \frac{t - \mu}{\sigma}$$

for $t$, som gir

$$t = \mu + z \cdot \sigma = 24.8 - 3.09 \cdot 2.2 = 18.$$

Vi har dermed

$$P(T > 18) = P\left(\frac{T - \mu}{\sigma} > \frac{18 - 24.8}{2.2}\right) = P(Z > -z_{0.001}) = 1 - 0.001 = 0.999,$$

og kan hevde med 99.9% sikkerhet at temperaturen kommer over 18 grader.

**5.32 (28). Varighet av prosjekt**

La $X_i$ være varigheten til delprosjekt $i$, for $i = 1, 2, 3, 4$. Da er $X_i$ normalfordelt med forventningsverdi $\mu_i$ og standardavvik $\sigma$, hvor

$$\mu_1 = 4, \quad \mu_2 = 5, \quad \mu_3 = 7, \quad \mu_4 = 9 \quad \text{og} \quad \sigma = 1.$$

Prosjektets totale varighet er $Y = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$. Siden $Y$ er en lineærkombinasjon av normalfordelte tilfeldige variable, er også $Y$ normalfordelt. Forventningsverdien til $Y$ er

$$E[Y] = E[X_1 + X_2 + X_3 + X_4] = E[X_1] + E[X_2] + E[X_3] + E[X_4] =$$

$$= \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 = 4 + 5 + 7 + 9 = 25.$$

Variansen til $Y$ er

$$Var[Y] = Var[X_1] + Var[X_2] + Var[X_3] + Var[X_4] = 4\sigma^2 = 4.$$

La $\mu_Y = E[Y]$ og $\sigma_Y^2 = Var[Y]$. Da har vi

$$P(Y \leq 20) = P\left(\frac{Y - \mu_Y}{\sigma_Y} \leq \frac{20 - 25}{2}\right) = P(Z \leq -2.5) = G(-2.5) = 0.0062,$$

hvor $Z = (Y - \mu_Y)/\sigma_Y$ er standard normalfordelt, og $G(z)$ er den kumulative standard normalfordelingen.