Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Bokmål

Faglig kontakt under eksamen: Professor Jarle Tufto
Telefon: 99 70 55 19

Brukerkurs i statistikk, ST0103

3. desember 2010
Kl. 9–13

Hjelpemidler: Ett håndskrevet gult A4-ark, bestemt enkel kalkulator, "Tabeller og formler i statistikk" (Tapir forlag), K. Rottmann: Matematisk formelsamling.

Alle svar skal begrunnes.

Oppgave 1 En klimaforsker predikerer at endring X i gjennomsnittstemperatur i Norge de neste 50 år vil være normalfordelt med forventning $\mu = +2{,}5°\text{C}$ og standardavvik $\sigma = 1{,}5°\text{C}$.

a) Hva er sannsynligheten for at gjennomsnittstemperaturen avtar dersom klimaforskeren har rett?

b) Om vi forutsetter at gjennomsnittstemperatur faktisk øker, hva blir da sannsynligheten for at gjennomsnittstemperaturen øker med mer enn 4°C?

En samfunnsøkonom mener at de totale samfunnskostnadene Y for Norge som følge av en endring i gjennomsnittstemperatur X er tilnærmet gitt ved $Y = a(X - x_0)^2$ hvor $a = 500$ milliarder kr/°C^2 og $x_0 = 1°\text{C}$.

c) Hva blir forventningsverdien til samfunnskostnadene Y under disse forutsetningen? Hint: Utnytt sammenhengen $\text{Var}\, X = E(X^2) - (EX)^2$. Det er ikke nødvendig å finne sannsynlighetstettheten til Y.

Oppgave 2 Anta at Y er en kontinuerlig stokastisk variabel med sannsynlighetstetthet

$$f(y) = \frac{1}{\beta y^2} e^{-\frac{1}{\beta y}}, \qquad (1)$$

for $y > 0$ og 0 ellers.

a) Anta at $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ er n uavhengige observasjoner fra denne fordelingen. Vis at sannsynlighetsmaksimeringsestimatoren av β er

$$\hat{\beta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{Y_i}, \tag{2}$$

b) La $X = 1/Y$. Finn sannsynlighetstettheten til X. Hva kalles denne fordelingen?

c) Bruk kjente egenskaper til fordelingen i forrige punkt til å vise at $\hat{\beta}$ er forventningsrett for β.

Oppgave 3 En forsker ønsker å undersøke om tilvekst hos gran er påvirket av av gjennomsnittstemperatur om sommeren. Han måler tykkelsen (i mm) på $n = 50$ årringer $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{50}$ på et gitt tre og innhenter data på gjennomsnittlig sommertemperaturer $x_1, x_2, \ldots, x_{50}$ (i °C) i tilsvarende periode. Forskeren analyserer dataene ved hjelp av en lineær regresjonsmodell

$$Y_i = \alpha + \beta x_i + \epsilon_i \tag{3}$$

hvor $\epsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$.

a) Hva blir estimatet av β dersom $\sum_{i=1}^{50}(Y_i - \bar{Y})(x_i - \bar{x}) = 10{,}30$ og $\sum_{i=1}^{50}(x_i - \bar{x})^2 = 138{,}8$?

b) Det er kjent at $\hat{\beta}$ er forventningsrett for β. Forklar hvorfor $\hat{\beta}$ også er normalfordelt. Vis at

$$\operatorname{Var}\hat{\beta} = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{50}(x_i - \bar{x})^2}, \tag{4}$$

Hint: $\sum_{i=1}^{50}(Y_i - \bar{Y})(x_i - \bar{x}) = \sum_{i=1}^{50} Y_i(x_i - \bar{x})$

Anta at at vi kjenner σ og at denne parameteren er lik 0,2 mm.

c) Utfør en en-sidig hypotesetest av $H_0 : \beta \leq 0$ versus $H_1 : \beta > 0$.

d) Finn styrken til testen i forrige punkt gitt at $\beta = 0{,}01$ mm/°C.