Kumulantgenererende funksjoner.

La $M_X(t)$ betegne den momentgenererende funksjonen til den stokastiske variable X. Den kumulantgenererende funksjonen til X defineres som

$$K_X(t) = \ln M_X(t).$$

Videre defineres den r'te kumulanten til X som den r'te deriverte av denne innsatt $t = 0$,

$$k_r = K_X^{(r)}(0).$$

Den første og andre deriverte blir

$$K_X'(t) = M_X'(t)/M_X(t)$$

og

$$K_X''(t) = [M_X(t)M_X''(t) - M_X'(t)^2]/M_X(t)^2.$$

Ved å bruke at $M_X(0) = 1$ finner vi da

$$k_1 = \mathrm{E}X$$

og

$$k_2 = \mathrm{E}X^2 - (\mathrm{E}X)^2 = \mathrm{var}(X).$$

Eksempler

(a) Poissonfordelingen

$$M_X(t) = e^{\lambda(e^t-1)}$$

$$K_X(t) = \ln M_X(t) = \lambda(e^t - 1)$$

som gir at alle deriverte blir like

$$K^{(r)}(t) = \lambda e^t.$$

Dermed er alle kumulantene like, $k_r = \lambda$ for $r = 1, 2, \ldots$. Vi har tidligere funnet at de to første kumulatene, forventningen og variansen, begge er lik parameteren λ i Poissonfordelingen.

(b) Normalfordelingen

Hvis X er normalfordelt med forventning μ og varians σ^2, så er

$$M_X(t) = e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}.$$

Den kumulantgernererende funksjonen blir dermed et polynom av andre grad

$$K_X(t) = \mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2.$$

Ved å derivere og sette inn $t = 0$ finner vi at $\mathrm{E}X = \mu$, $\mathrm{var}(X) = \sigma^2$, og $k_r = 0$ for $r \geq 3$.

Entydighet

Vi har sett at det til enhver fordeling svarer en momentgenererende funksjon. Det kunne imidlertid tenkes at at to forskjellige fordelinger kunne gi den samme momentgenererende funksjonen, men det er ikke tilfellet. Hvis vi finner at to stokastiske variable X og Y har samme momentgenererende funksjon, dvs. $M_X(t) = M_Y(t)$ of alle t, så har X og Y defor samme fordeling. Det er med andre ord slik at den momentgenererende funksjonen til en stokastisk variabel, og dermed også den kumulantgenererende funksjonen, entydig bestemmer dens fordeling.

Summer av uavhengige stokastiske variable

La $X_1, X_2, ...X_n$ være uavhengige stokastiske variable og la Z betegne summen, $Z = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Da er

$$M_Z(t) = \mathrm{E}e^{Zt} = \mathrm{E}e^{X_1 t + X_2 t + \cdots X_n t}$$

$$= \mathrm{E}(e^{X_1 t})\mathrm{E}(e^{X_2 t}) \cdots \mathrm{E}(e^{X_n t})$$

$$= M_{X_1}(t) M_{X_2}(t) \cdots M_{X_n}(t).$$

Ved å ta logaritmen på begge sider finner vi

$$K_Z(t) = K_{X_1}(t) + K_{X_2}(t) + \cdots + K_{X_n}(t).$$

Hvis vi nå deriverer r ganger of setter inn $t = 0$ finner vi at r'te kumulant til summen Z er summen av de r'te kumulantene til hvert enkelt ledd i summen. Vi har før sett at dette gjelder for de to første kumulantene, dvs. at forventninger og varianser er additive.