Løsningsforslag øving 14

12.14

Dersom H_0 forkastes med et nivå 0.05 betyr det at testobservatoren hadde en verdi i et kritisk område med signifikansnivå 0.05. På grunn av definisjonen til signifikansnivå vil alle hypotesetester med signifikansnivå 0.01 også ha signifikansnivå 0.05. Det er derfor mulig at de to hypotesetestene i oppgaven har identiske kritiske områder. Det er derimot ikke slik at alle hypotesetester med signifikansnivå 0.05 også har signifikansnivå 0.01. Der er derfor mulig at det kritiske området i testen med nivå 0.01 er mindre. Derfor er det mulig å forkaste H_0 med et nivå 0.05, og ikke forkaste H_0 i en test med nivå 0.01.

Dersom H_0 forkastes med et nivå 0.01 vil vi derfor tenke at det kritiske området for en test med nivå 0.05 må være større, slik at en forkastning på nivå 0.01 alltid betyr en forkastning på nivå 0.05. Det kan derimot merkes at de kritiske områdene i disse testene ikke er definerte. Det er også mulig å lage uendelig mange forskjellige kritiske områder for en hypotesetest ved et hvilket som helst nivå. Vi kan derfor fint lage to hypotesetester, én med nivå 0.01, og en annen med nivå 0.05, slik at deres kritiske områder er disjunkte. I den spesifikke settingen hvor vi ønsker å teste en ensidig hypotese for parameteren til et Bernoulli-forsøk er det derimot klart at det eneste fornuftige valget av kritisk område er på formen $K = [\tilde{p}, 1]$. Hvis man derfor lager to gode hypotesetester med et slikt kritisk område vil alltid en forkastning på et nivå 0.01 medføre en forkastning på et nivå 0.05.

12.17

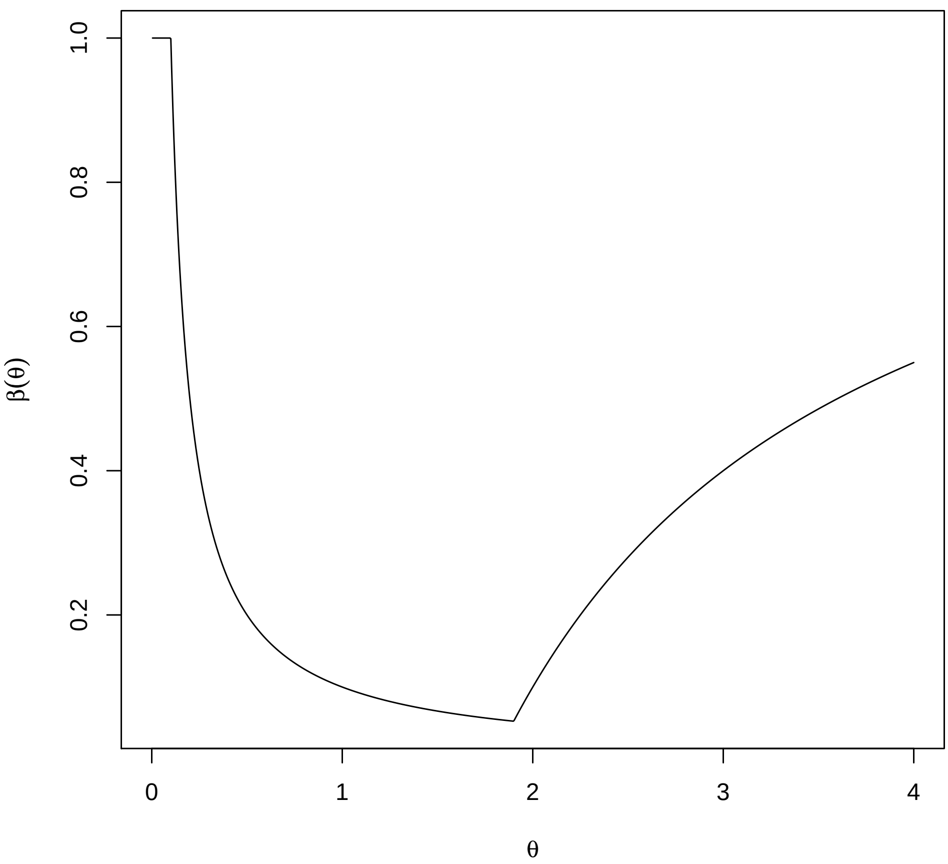
Vi har testobservatoren $X \sim U(0, \theta)$ og det kritiske området $K_X = [0, 0.1] \cup [1.9, \infty)$. Dette kan virke som et rimelig valg av kritisk område, fordi det vil forkaste nullhypotesen for "ekstreme" verdier av θ. Hvis θ er veldig liten er det stor sannsynlighet for å havne i området $[0, 0.1] \in K_X$, og hvis θ er veldig stor er det stor sannsynlighet for å havne i området $[1.9, \infty)$. Signifikanskoeffisienten α tilsvarende nullhypotesen $\theta = 2$ er gitt som den minste verdien som oppfyller ulikheten $P(H_0 \text{ forkastes}|H_0) \leq \lambda$. Vi finner derfor

$$P(H_0 \text{ forkastes}|H_0) = P(X \in K_X|\theta = 2) = P(X \in [0, 0.1] \cup [1.9, 2]|\theta = 2) = \frac{|[0, 0.1] \cup [1.9, 2]|}{|[0, 2]|} = 0.1.$$

Dette gir $\alpha = 0.1$.

Vi vil nå finne styrkefunksjonen β. Denne er gitt som funksjonen $\beta(\theta) = P(X \in K_X|\theta)$, altså sannsynligheten for at nullhypotesen forkastes for alle verdier av θ. Det er klart at styrkefunksjonen kun er definert for $\theta \geq 0$. For $\theta \leq 0.1$ vil alltid X havne i det kritiske området, og styrkefunksjonen er lik 1. For $0.1 < \theta < 1.9$ vil styrkefunksjonen synke monotont, siden sannsynligheten for at $X \in [0, 0.1]$ blir mindre og mindre. For $\theta \geq 1.9$ vil styrkefunksjonen begynne å stige igjen. Når $\theta \to \infty$ vil $\beta(\theta) \to 1$. Vi kan tegne funksjonen:

```
beta = function(theta) (pmin(0.1, theta) + (theta - pmin(1.9,
  theta))) / theta
theta = seq(0, 4, length.out = 1000)
plot(theta, beta(theta), "l",
     ylab = expression(beta(theta)),
     xlab = expression(theta))
```



Vi lar den alternative hypotesen være gitt ved $\theta \neq 2$. Da er teststyrken i punktet $\theta = 2.5$ gitt ved

$$\beta(\theta) = P(X \in K_X | \theta = 2.5) = \frac{|[0, 0.1] \cup [1.9, 2.5]|}{|[0, 2.5]|} = \frac{0.7}{2.5} = 0.28.$$

12.18

Trekking uten tilbakelegging kan modelleres ved et hypergeometrisk forsøk. La θ være antall hvite brikker i urnen. Da er sannsynligheten for å trekke x hvite brikker lik

$$P(X = x|\theta) = \frac{\binom{\theta}{x}\binom{10-\theta}{3-x}}{\binom{10}{3}}, \quad x = 0, \ldots, \min\{3, \theta\}.$$

Parameterrommet blir her $\Omega_\theta = \{5, 6, \ldots, 10\}$. Det kritiske området er $K_X = \{2, 3\}$. Da er signifikanskoeffisienten lik

$$\begin{aligned}
\alpha &= P(X \in K_X|\theta = 5) = P(X = 2|\theta = 5) + P(X = 3|\theta = 5) \\
&= \frac{\binom{5}{2}\binom{5}{1}}{\binom{10}{3}} + \frac{\binom{5}{3}\binom{5}{0}}{\binom{10}{3}} \\
&= \frac{10 \cdot 5}{120} + \frac{10 \cdot 1}{120} \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

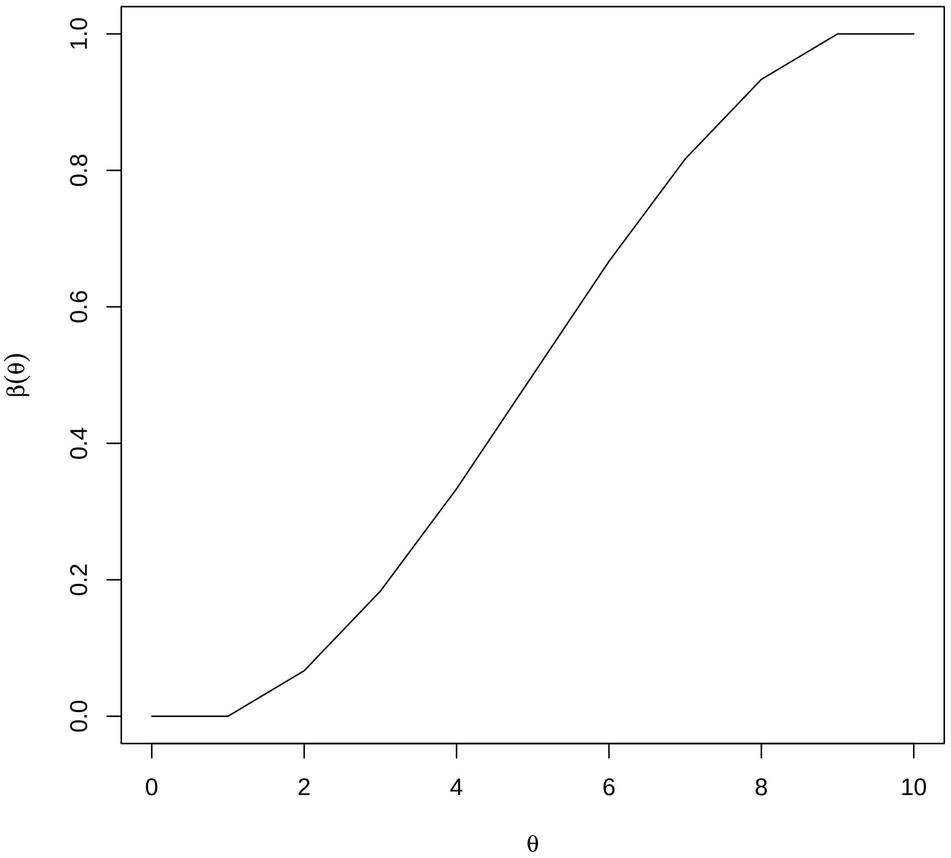
Teststyrken er definert som $\beta(\theta) = P(X \in K_X|\theta)$. Vi finner

$$\beta(6) = \frac{\binom{6}{2}\binom{4}{1}}{\binom{10}{3}} + \frac{\binom{6}{3}\binom{4}{0}}{\binom{10}{3}} = \frac{15 \cdot 4}{120} + \frac{20 \cdot 1}{120} = \frac{2}{3} \approx 0.6667.$$

$$\beta(7) = \frac{\binom{7}{2}\binom{3}{1}}{\binom{10}{3}} + \frac{\binom{7}{3}\binom{3}{0}}{\binom{10}{3}} = \frac{21 \cdot 3}{120} + \frac{35 \cdot 1}{120} = \frac{98}{120} \approx 0.8167.$$

Det er klart at styrkefunksjonen til testen vil være lik 0 for $\theta \leq 1$ og at den vil stige for $1 < \theta < 9$ mens den vil være lik 1 for $\theta \geq 9$. Vi tegner styrkefunksjonen:

```
beta = function(theta) {
  dhyper(2, theta, 10 - theta, 3) + dhyper(3, theta, 10 - theta,
  3)
}
theta = 0:10
plot(theta, beta(theta), "l",
     ylab = expression(beta(theta)),
     xlab = expression(theta))
```



12.21

Den geometriske fordelingen har sannsynlighetstetthet $f(x;p) = p(1-p)^{x-1}$. Dette gir rimelighetsfunksjonen

$$L(p) = \prod_{i=1}^{n} f(x;p) = p^n (1-p)^{n(\overline{x}-1)}.$$

Vi deriverer logaritmen av rimelighetsfunksjonen for å finne rimelighetsestimatoren:

$$l(p) = \ln L(p) = n \ln p + n(\overline{x}-1)\ln(1-p).$$

$$l'(p) = \frac{n}{p} - \frac{n(\overline{x}-1)}{1-p}.$$

Vi setter den deriverte lik null og får

$$l'(\hat{p}) = 0 \implies \frac{n}{\hat{p}} = \frac{n(\overline{x}-1)}{1-\hat{p}} \implies \hat{p} = \frac{1}{\overline{x}}.$$

Nullhypotesen sier at $p = p_0$, så den eneste mulige verdien for rimelighetsestimatoren under nullhypotesen er $\hat{p}_0 = p_0$. Dette gir rimelighetsobservatoren

$$\Lambda = \frac{L(\hat{p}_0)}{L(\hat{p})} = \frac{p_0^n(1-p_0)^{n\overline{X}-1}}{\hat{p}^n(1-\hat{p})^{n(\overline{x}-1)}} = \left(p_0\overline{X}\right)^n \left(\frac{\overline{X}(1-p_0)}{\overline{X}-1}\right)^{n(\overline{X}-1)}.$$

Vi klarer ikke å finne fordelingen til Λ, da dette er en komplisert funksjon av $\overline{X}$. Det er derimot klart at Λ vil være liten når forskjellen mellom $\hat{p}$ og p_0 blir stor, dvs. når $\overline{X}$ blir enten veldig stor eller veldig liten. Dette kan også sees av å skissere Λ som en funksjon av $\overline{X}$. Vi kjenner ikke fordelingen til $\overline{X}$ heller, men vi vet at summen av n geometriske forsøk med parameter p er lik et binomisk forsøk med parametre n, p. Dette står også på side 31 i tabellsamlingen. Vi bruker derfor testobservatoren $Y = \sum_{i=1}^n X_i \sim \text{NegBin}(n, p)$. Vi sier at det kritiske området er på formen $K_Y = [n, a] \cup [b, \infty)$, hvor vi må finne a og b. For å gjøre det enklere for oss selv velger vi, som i eksempel 12.5 i notatet, a og b slik at de to områdene får like stor sannsynlighet. For en hypotesetest med nivå α velger vi derfor det kritiske området

$$K_Y = [n, y_{1-\alpha/2}] \cup [y_{\alpha/2}, \infty),$$

hvor y_α er den øvre α-kvantilen i fordelingen til en negativt binomisk fordeling med parametre n og p_0. Disse har vi dessverre ikke tabellverdier for, men det kan enkelt finnes via diverse regneprogrammer, som f.eks `R`: `y_alpha = qnbinom(1 - alpha, n, p)`.

12.22

Vi lar $X_1, \ldots, X_n$ være tilfeldige utvalg fra en eksponentialfordeling med parameter λ, som vil si at de har sannsynlighetstetthet $f(x; \lambda) = \lambda^{-1} \exp\left\{-\frac{x}{\lambda}\right\}$. Da er rimelighetsfunksjonen lik

$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \lambda) = \lambda^{-n} \exp\{-n\overline{x}/\lambda\}.$$

Vi ønsker å finne maksimum av rimelighetsfunksjonen, og går frem på standard måte:

$$l(\lambda) = \ln L(\lambda) = -n \ln \lambda - \frac{n\overline{x}}{\lambda}.$$

Vi deriverer og finner

$$l'(\lambda) = -\frac{n}{\lambda} + \frac{n\overline{x}}{\lambda^2}.$$

Dette gir rimelighetsestimatoren

$$l'(\hat{\lambda}) = 0 \implies \hat{\lambda} = \overline{x}.$$

Nullhypotesen er enkel, som betyr at rimelighetsestimatoren under H_0 er lik $\hat{\lambda}_0 = \lambda_0$. Vi kan nå finne rimelighetsobservatoren

$$\Lambda = \frac{L(\lambda_0)}{L(\hat{\lambda})} = \frac{\lambda_0^{-n} \exp\{-\frac{n\overline{X}}{\lambda_0}\}}{\hat{\lambda}^{-n} \exp\{-\frac{n\overline{X}}{\hat{\lambda}}\}} = \left(\frac{\overline{X}}{\lambda_0}\right)^n \exp\left\{-n\left(\frac{\overline{X}}{\lambda_0} - 1\right)\right\}.$$

Akkurat som i oppgave 12.21 er vi ikke istand til å finne fordelingen til rimelighetsestimatoren. Vi kjenner derimot igjen den algebraiske kjernen $x^n \exp\{-nx\}$, så vi vet at rimelighetsobservatoren er liten for veldig små og veldig store verdier av $\overline{X}$. Vi vet at summen av eksponentialfordelte variabler er gammafordelt. Det betyr at $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \text{Gamma}(n, \lambda)$. Dessverre har vi ingen tilgjengelige tabellverdier for gammafordelingen, men vi har tilgjengelige tabellverdier for kjikvadrat-fordelingen. Vi kjenner også til sammenhengen $\text{Gamma}(\nu/2, 2) = \chi^2(\nu)$, fra side 31 i tabellsamlingen. En kjent egenskap ved gammafordelingen $\text{Gamma}(n, \lambda)$ er at parameteren λ er en skalaparameter, som vil si at hvis $Y \sim \text{Gamma}(n, \lambda)$ så er $aY \sim \text{Gamma}(n, a\lambda)$. Det betyr at vi kan bruke testobservatoren

$$T = \frac{2}{\lambda_0} Y \sim \text{Gamma}(\frac{2n}{2}, 2\frac{\lambda}{\lambda_0}) \overset{H_0 \text{ sann}}{=} \text{Gamma}(\frac{2n}{2}, 2) = \chi^2(2n),$$

For at hypotesetesten skal ha nivå $\alpha = 0.05$ må vi finne det kritiske området $K_T = (0, a] \cup [b, \infty)$ hvor T er enten veldig stor eller veldig liten, som betyr at rimelighetsobservatoren Λ er liten. Vi velger a og b slik at sannsynligheten for hvert av de to områdene er like stor. Da får vi

$$K_T = (0, \chi^2_{1-\alpha/2,2n}] \cup [\chi^2_{\alpha/2,2n}, \infty).$$

Disse verdiene kan finnes fra statistikktabellen når vi kjenner n, som betyr at vi har konstruert en hypotesetest med nivå $\alpha = 0.05$.

12.23

$X_1, \ldots, X_n$ er et tilfeldig utvalg fra $\text{N}(\mu, 1)$-fordelingen. Da har de sannsynlighetstetthet

$$f(x; \mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^2}.$$

For å finne rimelighetsobservatoren må vi først finne rimelighetsestimatoren. Vi finner rimelighetsfunksjonen

$$\begin{aligned} L(\mu) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i; \mu) &= (2\pi)^{-n/2} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2} \\ &= (2\pi)^{-n/2} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - 2x_i\mu + \mu^2)} \\ &= (2\pi)^{-n/2} e^{-\frac{n}{2}(\overline{x^2} - 2\overline{x}\mu + \mu^2)}. \end{aligned}$$

Her er μ kun med i uttrykket i eksponentialfunksjonen, så det er klart at hvis vi ønsker å maksimere rimelighetsfunksjonen må vi minimere uttrykket $\overline{x^2} - 2\overline{x}\mu + \mu^2$. Dette uttrykket er minimert når $\mu = \overline{x}$, som vi kan se ved å derivere med hensyn på μ og sette uttrykket $-2\overline{x} + 2\mu$ lik null. Dette betyr at rimelighetsestimatoren er $\hat{\mu} = \overline{X}$. Nok en gang er nullhypotesen enkel, som vil si at rimelighetsestimatoren under nullhypotesen er lik $\hat{\mu}_0 = \mu_0$.

Vi setter opp rimelighetsobservatoren

$$\begin{aligned}\Lambda = \frac{L(\mu_0)}{L(\hat{\mu})} &= \frac{(2\pi)^{-n/2} e^{-\frac{n}{2}(\overline{X^2} - 2\overline{X}\mu_0 + \mu_0^2)}}{(2\pi)^{-n/2} e^{-\frac{n}{2}(\overline{X^2} - 2\overline{X}\hat{\mu} + \hat{\mu}^2)}} \\ &= e^{-\frac{n}{2}\left(2\overline{X}(\hat{\mu} - \mu_0) + \mu_0^2 - \hat{\mu}^2\right)} \\ &= e^{-\frac{n}{2}\left(2\overline{X}^2 - \overline{X}^2 + \mu_0^2 - 2\overline{X}\mu_0\right)^2} \\ &= e^{-\frac{n}{2}\left(\overline{X} - \mu_0\right)^2}.\end{aligned}$$

Vi kjenner ikke fordelingen til rimelighetsobservatoren, men vi kan observere at rimelighetsobservatoren er stor når forskjellen på μ_0 og $\overline{X}$ er liten. Vi kan derfor bruke testobservatoren $U = \sqrt{n}(\overline{X} - \mu_0)$, som vil være standard normalfordelt når nullhypotesen er sann. Rimelighetsobservatoren er liten når U er veldig stor eller liten. Vi konstruerer det kritiske området

$$K_U = (-\infty, a] \cup [b, \infty) = (-\infty, z_{1-\alpha/2}] \cup [z_{\alpha/2}, \infty),$$

hvor z_α er øvre kvantil i en standard normalfordeling. For en hypotesetest med nivå $\alpha = 0.01$ får vi $z_{1-\alpha/2} = -2.576$ og $z_{\alpha/2} = 2.576$

12.25

Vi har et tilfeldig utvalg $Y_1, \ldots, Y_n \sim U(0, \theta)$ som vil si at sannsynlighetstettheten er $f(y) = \theta^{-1}$ når $0 \leq y \leq \theta$. Vi har nullhypotesen $\theta = \theta_0$ og den alternative hypotesen $\theta < \theta_0$. Dette gir parameterrommet $\Omega_\theta = (0, \theta_0)$. Nullhypotesen er enkel, så rimelighetsestimatoren under nullhypotesen er alltid lik $\hat{\theta}_0 = \theta_0$. Siden vi kjenner sannsynlighetstettheten f kan vi finne sannsynlighetstettheten til $Y_{\max}$,

$$P(Y_{\max} \leq y) = P(Y_1 \leq y)^n = \left(\frac{y}{\theta}\right)^n \implies f_{\max}(y) = \frac{d}{dy} P(Y_{\max} \leq y) = \frac{n y^{n-1}}{\theta^n}, \quad 0 \leq y \leq \theta.$$

Siden $Y_{\max}$ kun er én variabel betyr det at rimelighetsfunksjonen $L_{\max}$ er lik sannsynlighetstettheten $f_{\max}$. Rimelighetsfunksjonen vokser når θ synker, men er lik null når $\theta < y_{\max}$. Derfor får vi rimelighetsestimatoren $\hat{\theta}_{\max} = y_{\max}$, basert på $Y_{\max}$. Rimelighetsobservatoren basert på $Y_{\max}$ blir derfor lik

$$\Lambda_{\max} = \frac{L_{\max}(\theta_0)}{L_{\max}(\hat{\theta}_{\max})} = \frac{\frac{n y_{\max}^{n-1}}{\theta_0^n}}{\frac{n \hat{\theta}_{\max}^{n-1}}{y_{\max}^n}} = \left(\frac{Y_{\max}}{\theta_0}\right)^n \cdot 1_{(Y_{\max} \leq \theta_0)}.$$

Rimelighetsobservatoren basert på $Y_{\max}$ er da identisk til rimelighetsobservatoren basert på $Y_1, \ldots, Y_n$ fra eksempel 12.2. Dette vil si at $Y_{\max}$ er en tilstrekkelig observator (ref. kapittel 11.6). Denne observatoren inneholder all tilstrekkelig informasjon, og vi er i stand til å utføre blant annet en hypotesetest kun ved å vite verdien $Y_{\max}$. Vi er ikke avhengig av å vite verdien til noen av de andre observasjonene $Y_1, \ldots, Y_n$.

Vi lar nå $\theta_0 = 1$. Vi ønsker å finne den kritiske verdien k slik at $P(\Lambda_{\max} \in K_\Lambda = [0, k]|H_0) = \alpha = 0.05$. Vi får

$$\begin{aligned}
P(\Lambda_{\max} \leq k) &= P(\left(\frac{Y_{\max}}{\theta_0}\right)^n \leq k|H_0) \\
&= P(Y_{\max} \leq \theta_0 k^{1/n}|H_0) \\
&= \left(\frac{\theta_0 k^{1/n}}{\theta_0}\right)^n \\
&= k.
\end{aligned}$$

Dette betyr at den kritiske rimeligheten er $k = \alpha = 0.05$. Styrkefunksjonen β er definert som $\beta(\theta) = P(\Lambda_{\max} \leq k|\theta)$. Vi får

$$\begin{aligned}
\beta(\theta) &= P(\lambda_{\max} \leq k|\theta) \\
&= P(\left(\frac{Y_{\max}}{\theta_0}\right)^n \leq k|\theta) \\
&= P(Y_{\max} \leq \theta_0 k^{1/n}|\theta) \\
&= \begin{cases} \left(\frac{\theta_0 k^{1/n}}{\theta}\right)^n = k\left(\frac{\theta_0}{\theta}\right)^n, & \theta > k^{1/n}\theta_0 \\ 1, & \theta \leq k^{1/n}\theta_0. \end{cases}
\end{aligned}$$

Denne funksjonen er lik 1 helt fram til en ganske stor verdi av θ, hvor den begynner å synke mot null. Vi skisserer funksjonen i slutten av oppgaven.

Nå erstatter vi $Y_{\max}$ med Y_1 i det foregående. Det vil si at vi ønsker å finne rimelighetsobservatoren basert på Y_1. Vi kjenner sannsynlighetstettheten til Y_1, som vil si at vi kjenner rimelighetsfunksjonen

$$L_1(y_1) = \theta^{-1}, \quad 0 \leq y_1 \leq \theta.$$

Vi ser at rimelighetsestimatoren blir lik $\hat{\theta}_1 = Y_1$. Dette gir rimelighetsobservatoren

$$\Lambda_1 = \frac{L_1(\theta_0)}{L_1(\hat{\theta}_1)} = \frac{Y_1}{\theta} \cdot q_{(Y_1 \leq \theta_0)}.$$

Vi finner styrkefunksjonen

$$\begin{aligned}
\gamma(\theta) &= P(\lambda_1 \leq k|\theta) \\
&= P(\frac{Y_1}{\theta_0} \leq k|\theta) \\
&= P(Y_1 \leq \theta_0 k|\theta) \\
&= \begin{cases} k\frac{\theta_0}{\theta}, & \theta > k\theta_0 \\ 1, & \theta \leq k\theta_0. \end{cases}
\end{aligned}$$

For å sjekke om den første testen er bedre enn den andre sjekker vi om $\beta(\theta) \leq \gamma(\theta)$ for alle $\theta < \theta_0$. Vi får

$$\frac{\beta}{\gamma} = \frac{1 - 1_{\theta > k^{1/n}\theta_0}(1 - k(\theta_0/\theta)^n)}{1 - 1_{\theta > k\theta_0}(1 - k(\theta_0/\theta))}.$$

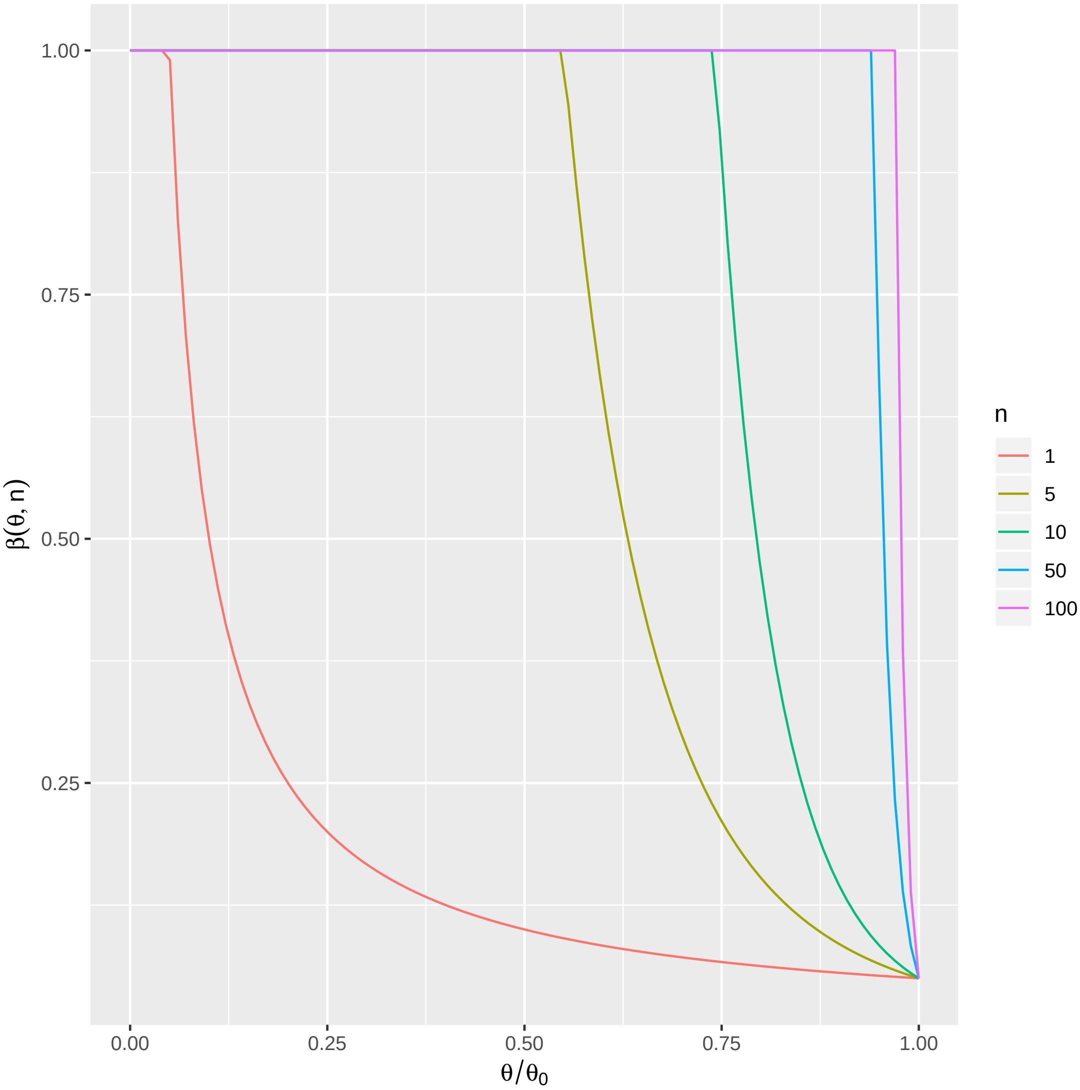
Vi kan dele denne brøken opp i tre deler. Første del så er både teller og nevner lik 1. I området $k\theta_0 < \theta < k^{1/n}\theta_0$ så er telleren lik 1, mens nevneren er mindre enn 1, så brøken er større enn 1. I området $k\theta_0 < \theta < \theta_0$ så er brøken lik

$$\frac{\beta}{\gamma} = \frac{k(\theta_0/\theta)^n}{k(\theta_0/\theta)} = \left(\frac{\theta_0}{\theta}\right)^{n-1} > 1,$$

siden $\theta < \theta_0$. Dette betyr at $\beta \geq \gamma$ for alle $\theta \in \Omega_1$, som vil si at den første testen er uniformt bedre enn den andre testen. Vi kan også si at den første testen er bedre enn den andre testen, fordi den benytter seg av mer av den tilgjengelige informasjonen, ved å basere seg på maksimum av alle observasjonene, istedenfor å bare basere seg på én av observasjonene, uten å bry seg om hva de andre observasjonene er.

Vi skriver styrkefunksjonen $\beta(\theta)$ som $\beta(\theta, n)$. Da kan vi si at $\gamma(\theta) = \beta(\theta, n)$. Vi kan tegne styrkefunksjonen for forskjellige verdier av n:

```
# x = theta / theta_0
beta = function(x, n) {
  1 - ifelse(x > k ^ (1 / n), 1 - k * x ^ (-n), 0)
}
k = 0.05
x_vec = seq(0, 1, length.out = 100)
n_vec = c(1, 5, 10, 50, 100)
data = expand.grid(n = n_vec, x = x_vec)
data\$beta = mapply(beta, data\$x, data\$n)
library(ggplot2)
plot = ggplot(data) +
  geom_line(aes(x = x, y = beta, colour = factor(n))) +
  labs(col = "n", y = expression(beta(theta, n)),
       x = expression(theta / theta[0]))
plot
```



Det er klart at jo større n er, jo lengre tid tar det før β begynner å synke når vi beveger oss mot $\theta = \theta_0$. Vi ser at styrkefunksjonen blir uniformt bedre for hver gang vi øker n.

12.26

Vi bruker eksempel 12.5 og ser på de tilfeldige variablene $X_1, \ldots, X_n$ fra en normalfordeling $N(\mu, \sigma^2)$. Vi vil teste nullhypotesen $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ mot den alternative hypotesen $H_1 : \sigma_2 \neq \sigma_0^2$. Som vi ser på side 165 blir den relative rimeligheten til nullhypotesen lik

$$\lambda(x) = z^{n/2} e^{-\frac{n}{2}(z+1)},$$

hvor $z = (\overline{x^2} - \overline{x}^2)/\sigma_0^2$. Under nullhypotesen er Z kjikvadrat-fordelt med $n-1$ frihetsgrader, som betyr at vi kan sette opp kjikvadrat-testen på side 166 i notatet. For $n = 20$ og

$\alpha = 0.05$ har vi

$$\chi^2_{1-\alpha/2,n-1} = 8.907 \text{ og } \chi^2_{\alpha/2,n-1} = 32.852.$$

Dette betyr at om vi observerer $Z = y = 8$ vil vi forkaste nullhypotesen ved nivå α, mens om vi observerer $Z = x = 30$ vil vi ikke forkaste nullhypotesen ved nivå α. Vi regner ut den relative rimeligheten til nullhypotesen for $y = 8$ og $x = 30$ og får

$$\lambda(y) \approx 8.8 \cdot 10^{-31} \text{ og } \lambda(x) \approx 3.3 \cdot 10^{-133}.$$

Her har vi altså at $\lambda(x) \leq \lambda(y)$ selv om χ^2-testen forkaster nullhypotesen for y og ikke for x.

12.27

Sentralgrenseteoremet sier at gjennomsnitt av tilfeldige variabler er tilnærmet normalfordelte når n er stor. For et utvalg $X_1, \ldots, X_n$ med forventning μ og varians σ^2 har vi altså at

$$\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \approx Z \sim N(0,1).$$

Anta nå at vi har totalt kn observasjoner, $X_1, \ldots, X_{kn}$. Vi bruker disse observasjonene til å lage k ulike gjennomsnitt $Y_1, \ldots, Y_k$ slik at $Y_j = \frac{1}{n}\sum_{i=1+(k-1)n}^{kn} X_i$. Da vet vi at hver av de k variablene er tilnærmet normalfordelte med forventning μ og varians σ^2/n. Nå kan vi konstruere de tre hypotesetestene fra eksempel 12.3, 12.4 og 12.5, som vil gi approksimative tester dersom n er stor nok.