Løsningsforslag

2.1

Hendelsen K har ikke inntruffet. I tillegg har ikke hendelsen $\emptyset$ inntruffet. I eksempelet hvor $\Omega = \boldsymbol{R}$ finnes det uendelig mange hendelser som ikke har inntruffet, blant annet alle hendelser på formen $B = (-\infty, t]$, hvor $t < 0$.

2.3

$\{\{1{,}2\},\emptyset\}$ er en familie av mengder, men det er ikke en hendelsesfamilie, siden $\{1{,}2\}^{\mathrm{c}} = \{3\}$, som ikke er et medlem av familien.
Familien $\{\emptyset,\Omega,\{1{,}2\},\{3\}\}$ er en hendelsesfamilie, siden kravene fra (2.2) er oppfylt.
1 er et utfall, siden det er et element av Ω. $\{1\}$ er derimot ikke en hendelse, siden det ikke er et element av ε. Siden vi har sett at det kan skje vet vi derfor at det er mulig å ha delmengder av utfallsrommet som ikke er hendelser.

2.4

ε_{d} er familien av alle delmengder av R. For å vise at denne er inneholdt i A må vi vise at ε_{d} er en hendelsesfamilie, og at den inneholder alle intervall i R. Siden den inneholder alle delmengder av R må den også inneholde alle intervaller. For en hvilken som helst delmengde av R vil også dets komplement være en delmengde av R. Derfor er ε_{d} lukket under komplementer. Den tellbare unionen av alle delmengder av R vil også være en delmengde av R, som betyr at ε_{d} er lukket under tellbar union. Dette betyr at ε_{d} er en hendelsesfamilie. Da må familien ε_{d} være inneholdt i A.

Vi ser nå på $\varepsilon = \cap_{G \in A} G$. Dette er en familie med mengder, siden det er en familie som inneholder i det minste alle intervallene i R. ε er også en hendelsesfamilie. Hvis et sett $B \in \varepsilon$ betyr det at B må være inneholdt i alle hendelsesfamiliene G. Siden $B \in G$ må også $B^C \in G$ for alle G. Det samme holder for union. Hvis settene B_i er i ε for $i \in I$, betyr det at de må være inneholdt i alle hendelsesfamilier G, som betyr at unionen deres også må være inneholdt i ε. ε er også den minste hendelsesfamilien som inneholder alle intervall. Dette ser vi fordi ε er snittet av alle mulige hendelsesfamilier som inneholder alle intervaller i R. Dette betyr også at ε må være mindre eller lik alle hendelsesfamiliene G. Men ε må også inneholde alle intervallene i R, siden dette er en fellesnevner for absolutt alle familiene G.

2.5

Akkurat som i eksempel 2.1 er det mulig å sette utfallsrommet for et enkelt kast til å være $\Omega = \boldsymbol{R}$, som resulterer i utfallsrommet $\Omega = \boldsymbol{R}^3$ for tre myntkast. Da setter vi $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, hvor hver enkelt komponent av vektoren er $\omega_i = 0$ dersom resultatet er mynt i kast nr. i, og $\omega_i = 1$ dersom resultatet er kron. De mulige utfallene blir da

$$\boldsymbol{\omega} \in \{(0,0,0),(0,0,1),(0,1,0),(0,1,1),(1,0,0),(1,0,1),(1,1,0),(1,1,1)\}$$

. Hvis vi tegner dette som punkter i $\boldsymbol{R}^3$ er resultatet alle kantene av en boks med volum 1.

Vi vil vise at $\{\omega\}$ er en hendelse. For å vise dette viser vi først at en hendelsesfamilie er lukket under tellbart snitt i tillegg til tellbar union. Anta at A og B er to hendelse. Da vet vi at også at både A^c, B^c og $A \cup B$ er hendelser. Da vet vi også at $(A^c \cup B^c)^c = (A \cap B)$ er en hendelse. Dette betyr at for alle hendelser A og B vet vi også at $A \cap B$ er en hendelse. Dette kan generaliseres til tellbar union og tellbart snitt. Definer nå boksen $B_i = (\omega_1 - t_i, \omega_1 + t_i) \times (\omega_2 - t_i, \omega_2 + t_i) \times (\omega_3 - t_i, \omega_3 + t_i)$, hvor t_i er et positivt tall. Vi lar rekken $t_1, t_2, \ldots$ konvergere mot null slik at $t_i > t_{i+1}$ for alle i, og $t_i \to 0$. Siden ε inneholder alle åpne bokser, er $B_i \in \varepsilon$ for alle i. ε er også lukket under tellbart snitt, som betyr at $\cap_{i=1}^{\infty} B_i = \{\omega\} \in \varepsilon$. Derfor er $\{\omega\}$ en hendelse.

2.8

Hvis hendelsen $\tilde{H}$ inntreffer betyr det at levetiden ω ligger i intervallet (t_1, ∞), altså at $\omega > t_1$. Å vise at alle åpne intervall er hendelser i $\tilde{\Omega}$ er ganske tricky. Denne oppgaven burde vært merket med en T. Vi vet at intervallet (t, ∞) er en hendelse. Da må også intervallet (-∞, t] være en hendelse. Vi kan nå lage en konvergerende serie av t'er, t$_1$, t$_2$, ... Vi lar denne konvergerende serien konvergere oppover mot verdien t, d.v.s. $\lim_{n\to\infty} t_n = t$. Vi kan nå se på den tellbare unionen av alle intervallene (-∞, t$_n$]. Da får vi

$$\cup_{n=1}^{\infty} (-\infty, t_n] = (-\infty, t).$$

Dette betyr at, for alle t'er er (-∞, t) en hendelse, som igjen betyr at komplementet [t, ∞) må være en hendelse. Dette betyr at mengden $(-\infty, t_1] \cup [t_2, \infty)$ er en hendelse for alle verdier av t_1 og t_2. Da får vi også at deres komplement, (t_1, t_2) er en hendelse for alle t_1 og t_2. Altså er alle åpne intervall hendelser.

Fra eksempel 2.4 ser vi at $\omega_{10} = 188$. Hendelsen $H = (t_1, \infty) \times \cdots, \times (t_n, \infty)$ er hendelsen hvor $\omega_i > t_i$ for alle $i = 1, \ldots, n$. For å vise at alle åpne bokser er hendelser kan vi generalisere beviset for at alle åpne intervall er hendelser.

2.9

Vi ser fra Tabell 2.1 at man kan dele tiden opp i intervaller, og så telle antall komponenter med levetid inni hvert enkelt tidsintervall. Dette kan derfor sees på som et eksperiment hvor man teller antall observasjoner i hvert intervall. Da kan man sette utfallsrommet for eksperimentet til å være $\Omega = N^k$, hvor k er antall tidsintervaller vi teller. Her kan det sies at et mer fornuftig valg av utfallsrom hadde vært $(\boldsymbol{N} \cup \{0\})^k$, slik at også utfallet 0 er et godkjent utfall. Slik tabellen ser ut er det derimot ingen rader med 0 målinger, som betyr at man kan si at dataene kommer fra utfallsrommet $\boldsymbol{N}^k$.

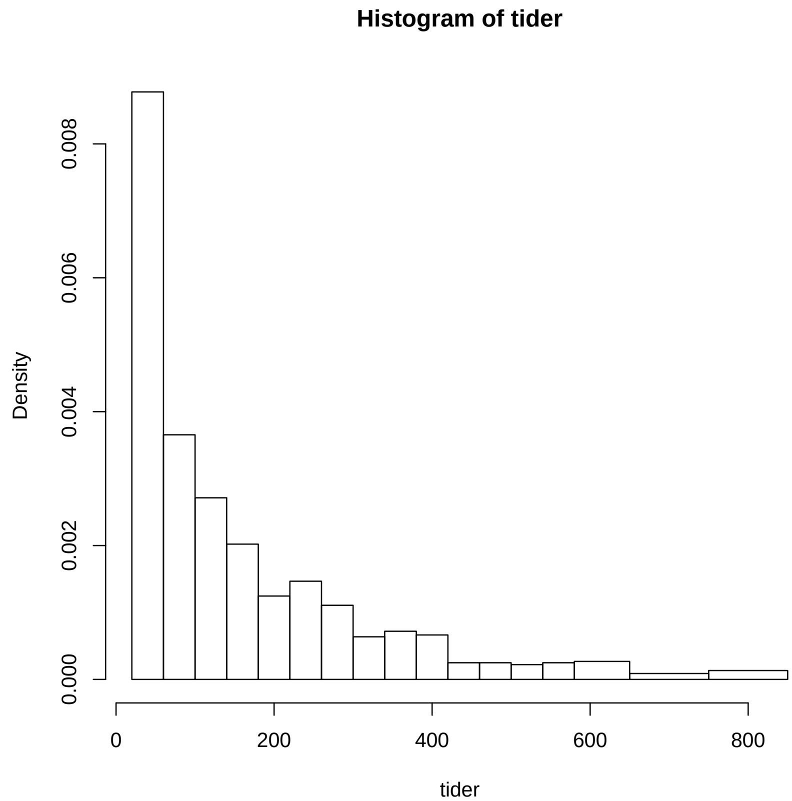
Vi kan blant annet estimere levetiden til en komponent ved å regne ut gjennomsnittet av alle de observerte levetidene. Da får vi

```
tid <- c(20, 60, 100, 140, 180, 220, 260, 300, 340,
         380, 420, 460, 500, 540, 580, 650, 750, 850)
antall <- c(166, 151, 132, 98, 73, 45, 53, 40, 23,
            26, 24, 9, 9, 8, 9, 17, 8, 12)
estimator <- sum(tid * antall) / sum(antall)
print(estimator)
```

```
[1] 178.66
```

Vi kan lage et histogram ved hjelp av `R`-kommandoen `hist()`.

```
tider <- rep(tid, antall)
hist(tider, breaks = tid)
```



2.12

A er en familie mengder, siden intervaller regnes som mengder. A er ikke en hendelsesfamilie, siden unionen av [0,1/4) og [1/4,1/2) er [0,1/2), som ikke finnes i A. Ω er utstyrt med den minste hendelsesfamilien som inneholder A. Vi "legger til" alle mengdene som kreves for å oppfylle kravene fra (2.2). Da får vi hendelsesfamilien

$$\varepsilon = \{[0, 1/4), [1/4, 1/2), [1/2, 1), [0, 1/2), ([0, 1/4) \cup [1/2, 1)), [1/4, 1), [0, 1), \emptyset\}$$

Mengden [1/2,3/4) er ikke et medlem av ε, så den er ikke en hendelse.

2.20

Vi bruker hintet og definisjonen av sannsynlighet til å si at
1 = P(mindre kort) + P(større kort) + P(likt kort).

Siden vi ikke vet noe om hva slags kort vi trekker, kan vi se fra symmetri at P(mindre kort) = P(større kort). Sannsynligheten for at det andre kortet har samme tallverdi er $3/51$, siden det er 3 gjenværende muligheter å trekke blant de 51 gjenværende kortene. Da får vi
$1 = 3/51 + 2 \cdot$ P(større kort),
som gir P(større kort) = $24/51$.

2.22

Vi ser fra teksten at nA er definert som antall ganger hendelsen A intreffer når et eksperiment utføres n ganger. Da har vi at $(\omega_i \in A)$ er en indikatorfunksjon, d.v.s. en funksjon som har verdi 1 hvis det er sant at $(\omega_i \in A)$, og verdi 0 hvis ikke. Vi utfører da n eksperimenter, og teller antall ganger hvor $\omega_i \in A$, altså at hendelsen A inntreffer. Den empiriske fordelingen $P_n(A) = nA/n$ er også en sannsynlighetsfordeling. Dette kan vi se ved å sjekke om de tre kravene fra Definisjon 2.3 holder.

1. For disjunkte hendelser $A_1, A_2, \ldots$ er det ikke mulig at flere enn en av hendelsene intreffer samtidig, siden de er disjunkte. Da får vi at $(\omega \in (A_1 \cup A_2, \ldots)) = (\omega \in A_1) + (\omega \in A_2) + \ldots$, som betyr at $P_n(A) = P_n(A_1) + P_n(A_2) + \ldots$.
2. Indikatorfunksjonen er enten lik 0 eller 1. Det andre som inngår i $P_n(A) = nA/n$ er den positive konstanten n. Da ser vi at $P_n(A)$ må være større enn eller lik 0.
3. Indikatorfunksjonen $(\omega \in \Omega)$ er alltid lik 1, siden ω kun kan ta verdier i Ω. Da er $P_n(\Omega) = n\Omega/n = n/n = 1$.

2.24

Vi bruker definisjonen av sannsynlighet. Den tomme mengden er disjunkt med alle andre mengder. Derfor er

$$P(A) = P(A + \emptyset) = P(A) + P(\emptyset) \implies P(\emptyset = 0).$$

Vi har også

$$P(A \cup B) = P(A \uplus (B \setminus (A \cap B))) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Hvis $A \subset B$ så er $B = A \uplus B \setminus A$, som gir

$$P(B) = P(A) + P(B \setminus A) \implies P(B) \geq P(A).$$

Vi vet at $A \subset \Omega$ og $P(\Omega) = 1$. Dette gir

$$P(A) \leq P(\Omega) = 1.$$

Vi vet at $A \uplus A^c = \Omega$. Dette gir

$$P(\Omega) = 1 = P(A) + P(A^c).$$