Løsningsforslag øving 4

5.4

Alle permutasjoner:
$\{1,2,3,4\}$, $\{1,2,4,3\}$, $\{1,3,2,4\}$, $\{1,3,4,2\}$, $\{1,4,2,3\}$, $\{1,4,3,2\}$,
$\{2,1,3,4\}$, $\{2,1,4,3\}$, $\{2,4,3,1\}$, $\{2,4,1,3\}$, $\{2,3,1,4\}$, $\{2,3,4,1\}$,
$\{3,1,2,4\}$, $\{3,1,4,2\}$, $\{3,2,1,4\}$, $\{3,2,4,1\}$, $\{3,4,1,2\}$, $\{3,4,2,1\}$,
$\{4,1,2,3\}$, $\{4,1,3,2\}$, $\{4,2,1,3\}$, $\{4,2,3,1\}$, $\{4,3,2,1\}$, $\{4,3,1,2\}$.
Alle permutasjoner av lengde 2:
$\{1,2\}$, $\{2,1\}$, $\{1,3\}$, $\{3,1\}$, $\{1,4\}$, $\{4,1\}$, $\{2,3\}$, $\{3,2\}$, $\{2,4\}$, $\{4,2\}$, $\{3,4\}$, $\{4,3\}$.
Det er totalt 24 permutasjoner, og 12 permutasjoner av lengde 2. Dette stemmer overens med det vi har lært.

5.6

Det finnes totalt $8! = 40320$ mulige plasseringer. Når det skal sitte en mann i annenhver stol kan vi enten la mennene sitte i stol 1,3,5,7 eller 2,4,6,8. For hver av de to mulighetene har vi $4!$ muligheter for mennene og $4!$ muligheter for kvinnene. Dette gir en total på $2 \cdot 4! \cdot 4! = 1152$ muligheter.

5.7

Det kan trekkes $4 + 3 + 2 + 1 = 10$ linjestykker mellom 5 punkter i planet.

5.9

I et ordnet utvalg er rekkefølgen på elementene viktig. Vi kan derfor se for oss at et ordnet utvalg representeres ved en vektor. Da er det klart at $(1,2)$ og $(2,1)$ sees på som to forskjellige utvalg. I et ikke-ordnet utvalg bryr vi oss ikke om rekkefølgen. Da kan vi tenke oss at vi representerer det ikke-ordnede utvalget ved en vanlig mengde, som vil si at $\{1,2\}$ og $\{2,1\}$ er det samme utvalget.

5.10

5.10 Vi viser først at binomialteoremet holder for $n=0$:

For $n=0$ er begge sider av uttrykket $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ like 1,
så dette holder.

Anta nå at $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ for en gitt verdi av n. Test for $n+1$:

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} + b^{n+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} a^{k+1} b^{n-k} + b^{n+1}$$ (lar summen gå fra 0 til n istedenfor 1 til $n+1$)

$$= \sum_{k=0}^{n} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}\right) a^{k+1} b^{n-k} + b^{n+1}$$

$$= a\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k+1} a^{k+1} b^{n-k} + b^{n+1}$$ (her bruker vi at $\binom{n}{n+1}=0$ til å endre andre summen fra $\sum_{k=0}^{n}$ til $\sum_{k=0}^{n-1}$)

$$= a(a+b)^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} + b^{n+1}$$

$$= a(a+b)^n + b\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

$$= a(a+b)^n + b(a+b)^n = (a+b)^{n+1}$$

Da har vi vist binomialteoremet ved induksjon.

5.11

For en hver kombinasjon av heltallene n og k kan vi bruke identiteten fra 5.10: $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$. Vi bruker denne identiteten iterativt og "teller oss nedover". Vi vet at $\binom{n}{n+1} = 0$ og at $\binom{n}{0} = 1$. En hver binomialkoeffisient vil derfor til slutt reduseres til en endelig sum av ett-tall. Derfor er alle binomialkoeffisienter naturlige tall.

5.13

Tettheten til den binomiske fordelingen er en diskret tetthet, definert for tallene $k = 0, 1, \ldots, n$. Alle heltallene mellom 0 og n finnes i R. Derfor kan vi definere tettheten når vi har utfallsrommet R. Vi kaller den binomiske fordelingen med utfallsrom $\{0,\ 1,\ \ldots\}$ for $\tilde{f}$. Da kan den binomiske fordelingen med utfallsrom R defineres som

$$f(x) = \begin{cases} \tilde{f}(x), & x \in \{0, 1, 2, \ldots\} \\ 0, & x \notin \{0, 1, 2, \ldots\}. \end{cases}$$

Vi vet at f oppfyller kravene for en tetthet på grunn av dens forbindelse med tettheten $\tilde{f}$.

5.14

En spiller blir slått ut hvis én person får en annen verdi en alle andre som kaster mynt. Hvis en spesifikk person blir slått ut finnes det derfor kun 2 måter dette kan skje. Det er totalt n personer, som betyr at det er n mulige personer som kan gå ut. Dette gir $2n$ muligheter. Totalt finnes det 2^n mulige utfall av at alle kaster mynt. Dette gir en sannsynlighet på $2n/2^n = n/2^{n-1}$ for at en person blir slått ut. (Denne oppgaven kan også løses ved å bruke den binomiske fordelingen.)

Merk: Her kan det være at noen regner ut sannsynligheten for hendelsen at en gitt person blir slått ut istedenfor sannsynligheten for hendelsen at hvem som helst blir slått ut. Man må tenke ganske likt for å løse oppgaven uansett, så dette bør gi en god uttelling.

5.15

Sannsynligheten for å gå et steg frem til en hver tid er p_x, sannsynligheten for å gå et steg bak er p_y slik at $1 = p_x + p_y$. Hvis mannen har gått totalt n steg, og endt opp med å gå r steg fremover, betyr dette at han har gått totalt $x = r + y$ steg fremover, og y steg bakover, slik at $x + y = n$. Vi bryr oss ikke om rekkefølgen på steg-retningene. Dette gir $x = (n + r)/2$. Vi ser at dette kun er mulig hvis både n og r er partall eller oddetall. Siden vi ikke bryr oss om rekkefølgen på stegene får vi en binomisk sannsynlighetsfordeling. Da får vi

$$P(r; n) = \begin{cases} \binom{n}{\frac{n+r}{2}} p_x^{\frac{n+r}{2}} p_y^{\frac{n-r}{2}} & \text{n oddetall, r oddetall} \\ \binom{n}{\frac{n+r}{2}} p_x^{\frac{n+r}{2}} p_y^{\frac{n-r}{2}} & \text{n partall, r partall} \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

5.16

Hendelsen å få minst en 6'er er komplementet til hendelsen å få null 6'ere. For minst to og tre 6'ere er det komplementet til å få enten null eller en 6'er, eller enten null, en eller to 6'ere. Vi plugger dette inn i den binomiske fordelingen $f(k;n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. Da får vi:

1. Minst en 6'er på 6 kast:

$$1 - f(0;6) \approx 0.67.$$

1. Minst to 6'ere på 12 kast:

$$1 - f(0;12) - f(1;12) \approx 0.62.$$

1. Minst tre 6'ere på 18 kast:

$$1 - f(0;18) - f(1;18) - f(2;18) \approx 0.60.$$