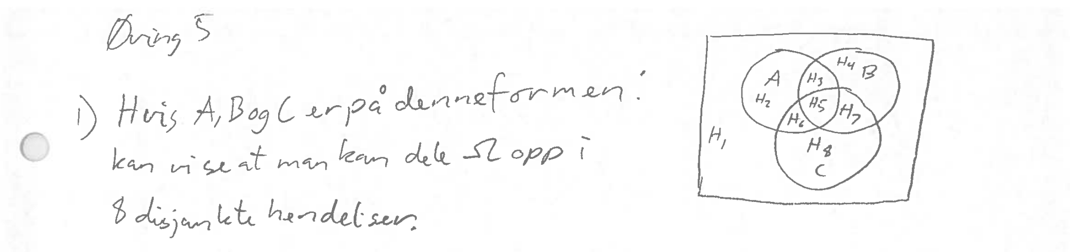
## Løsninsforslag øving 5

### 1




$\mathcal{E}$ er den minste hendelsesfamilien som inneholder A, B og C. Den største hendelsesfamilien det er mulig å lage, kun basert på de tre hendelsens A, B, C, er den som inneholder alle mulige kombinasjoner av $H_1, \ldots, H_8$. Denne hendelsesfamilien $\mathcal{E}_d$ inneholder $\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} = 2^m$ hendelser. $\mathcal{E}$ må være mindre enn eller like stor som $\mathcal{E}_d$, siden det er den minste mulige hendelsesfamilien. Derfor har $\mathcal{E}$ høyst $2^8$ hendelser. Legg merke til at det selvfølgelig er mulig å lage større hendelsesfamilier ved å innføre flere hendelser enn A, B og C. Vi kan nå konstruere en delmengde D som inneholder den venstre halvdelen av $H_1$. Dette er klart en delmengde, men det er ikke mulig å konstruere D ved hjelp av unioner og komplementer av A, B, C. Derfor er ikke D en hendelse i $\mathcal{E}$. (Det finnes derimot svært mange andre hendelsesfamilier, basert på andre "basiselementer", hvor D er en hendelse. Den er bare ikke det for hendelsesfamilien $\mathcal{E}$.)

### 2

P(E) beskriver sannsynligheten for en hendelse E. Dette kan derfor være svært mye forskjellig. Her er det opp til dere å være kreative. Eksempler kan være sannsynligheten for å få kron i et myntkast, som betyr at E er hendelsen å få kron. Et annet eksempel er Sannsynligheten for at det skal regne mer en 20 mm neste dag, hvor E er hendelsen at det regner mer en 20 mm. Et tredje eksempel er at du kaster en terning et odde antall ganger før du får en sekser. Her vil da E være hendelsen at første sekseren du får kommer på det første, tredje, femte, ... kastet. I spalteeksperimentet kan $E_A$ være hendelsen at det gjøres en partikkelobservasjon i området A. $P(E_A)$ er da sannsynligheten for at dette skjer.

### 3

At en hendelsesfamilie er en boolsk algebra betyr at den oppfyller alle aksiomene som kreves for å være en boolsk algebra. Disse er assosiativitet, kommutativitet, absorpsjon, distributivitet of kompliment. Se hva disse aksiomene betyr på wikipedia. Du kan her bytte ut $\vee$ med $\cup$, union; $\wedge$ med $\cap$, snitt; $(\neg\ a)$ med $a^c$, kompliment.

De Morgans lover sier at $(A_1 \cup A_2 \cup \ldots)^c = A_1^c \cap A_2^c \cap \ldots$, og at $(A_1 \cap A_2 \cap \ldots)^c = A_1^c \cup A_2^c \cup \ldots$. Vi kan vise at disse lovene gjelder for hendelsene i en hendelsesfamilie. For hendelsene

$A_1$, $A_2$, ..., la $s \in V = (\cup_i A_i)^c$, slik at $s \notin \cup_i A_i$. Da må $s \in A_i^c$ for alle $i$, så $s \in H = \cap_i A_i^c$. Dette beviser at mengden $V$ er inkludert i mengden $H$, altså $V \subseteq H$. På samme måte kan vi vise at $H \subseteq V$. La $s \in H$. Da må $s \in A_i^c$ for alle $i$, slik at $s \notin \cup_i A_i$ som igjen betyr at $s \in V$. Da har vi at $V \subseteq H$ og $H \subseteq V$, som betyr at $V = H$, som betyr at $(\cup_i A_i)^c = \cap_i A_i^c$. Den andre av De Morgans lover kan vises på samme måte, siden $(A^c)^c = A$.

### 4

En $\sigma$-algebra vil alltid være en hendelsesfamilie, siden $\sigma$-algebraer er lukkede under tellbar union og komplement, noe som er definisjonen på en hendelsesfamilie. I tillegg vil alle hendelsesfamilier inneholde $\Omega$, siden $\Omega = A \cup A^c$ for en hendelse $A$. Derfor vil alle hendelsesfamilier være en $\sigma$-algebra.

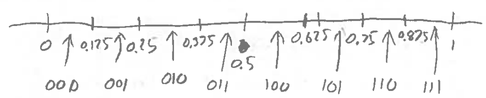
### 5

Et hvilke som helst tall kan uttrykkes ved hjelp av sin bineærrepresentasjon. Vi kan f.eks uttrykke tallet 8 som 1000 ($2^3$), tallet 9 som 1001 ($2^3 + 2^0$), tallet 10 som 1010 ($2^3 + 2^1$), osv... Det samme kan gjøres for desimaltall. Da kan vi si at tallet 0.5 er 0.1 ($2^{-1}$), tallet 0.25 er 0.01 ($2^{-2}$), tallet 0.75 er 0.11 ($2^{-1} + 2^{-2}$), osv... Tallet $u = \pi/10 \approx 0.314$ kan derfor uttrykkes på binærform som 0.0101..., Det vil si at $b_1 = 0$, $b_2 = 1$, $b_3 = 0$. For desimaltallet $u = e/10 \approx 0.272$ får vi 0.0100..., altså er også her $b_1 = 1$, $b_2 = 1$, $b_3 = 0$.

5) Vi kan illustrere dette ved å dele ~~opp~~ intervallet $\Omega = [0,1]$

i 8 like store deler,

og nummerere dem:




Viser da at både $\pi/10$ og $e/10$

ligger inni intervallet 010

## 6

Vi kan si at et myntkast hvor resultatet er mynt representeres med en 0, og kron representeres med en 1. Da vil utfallsrommet til resultatet av n myntkast være mengden av alle mulige sekvenser $b_1$, $b_2$, ..., $b_n$, hvor $b_i \in \{0, 1\}$. Dette er det samme som $\Omega_n$. Vi kan anse $B_i$ som en tilfeldig variabel som angir resultatet av et myntkast. U er derfor en endelig vektet sum av tilfeldige variable, som betyr at U i seg selv er en tilfeldig variable. Hver $B_i$ er Bernoulli-fordelt. U representerer en rekke intervaller av lengde $(1/2)^n$ i intervallet [0,1], og det er mulig å se at sannsynligheten for å havne i hvert av disse intervallene er identisk (oppgave 5). U er derfor en diskret tilfeldig variabel med uniform sannsynlighet.

## 7

Hvis vi lar suksessansynligheten for hver enkelt Bernoulli-prosess være lik 0.5 kan vi se for oss at prosessen beskriver en følge med myntkast, hvor hvert enkelt Bernoulli-forsøk svarer til ett enkelt myntkast, slik at $B_i = 0$ svarer til Mynt og $B_i = 1$ svarer til Kron, i myntkast nr. $i$.

Vi lar $U = B_1 \cdot 2^{-1} + B_2 \cdot 2^{-2} + \ldots$. Siden alle leddene som inngår i $U$ er positive ser vi at den eneste måten vi kan ha $U \leq 1/2$ er hvis $B_1 = 0$. Hvis dette er oppfylt, vet vi fra egenskapene til en geometrisk sum at U alltid er mindre en eller lik $1/2$. Eneste måten vi kan få likhet i dette uttrykket er hvis $B_i = 1$ for alle $i > 1$. Da blir $P(U \leq 1/2) = P(B_1 = 0) = 1/2$.. Samme argumentasjon kan brukes for $U \leq 1/4$. Her må $B_1 = 0$ og $B_2 = 0$. Da vil summen av resten av leddene i U alltid være mindre en eller lik $1/4$. Dette gir $P(U \leq 1/4) = P(B_1 = 0 \cap B_2 = 0) = 1/4$.. På grunn av egenskapene til summen av en geometrisk rekke vet vi at U er mindre en eller lik $3/4$ så lenge ikke både $B_1$ og $B_2$ er positive. (Merk at vi har $U \leq 3/4$ når $B_1 = 1$ og $B_2 = 1$ hvis $B_i = 0$ for alle $i > 3$. Men sannsynligheten for dette er $P(B_3 = 0 \cap B_4 = 0 \cap \ldots) = \lim_{n\to\infty}(1/2)^n = 0$.) Sannsynligheten for at ikke både $B_1$ og $B_2$ er lik 1 er $1 - P(B_1 = 1 \cap B_2 = 1) = 1 - 1/4 = 3/4$.

For å vise at $P(U \leq u) = u$ kan vi observere at utfallsrommet til U er intervallet [0, 1]. Hvis alle $B_i$ er lik 1 er U = 1, og hvis alle $B_i$ er lik 0 er U = 0. Vi skriver $U_n = B_1 \cdot (1/2)^1, \cdot, \ldots, \cdot B_n \cdot (1/2)^n$. Da kan vi se at $U_1$ deler intervallet [0, 1] opp i to like lange linjestykker [0, 1/2] og [1/2, 1]. Videre vil $U_2$ dele intervallet opp i $2^2$ like lange linjestykker [0, 1/4], [1/4, 1/2], [1/2, 3/4] og [3/4, 1]. Fortsetter vi slik kan vi se at $U_n$ deler intervallet [0, 1] opp i $2^n$ like lange linjestykker med lengde $2^{-n}$ hver. Sannsynligheten for at $U_n \in [j \cdot 2^{-n}, (j+1) \cdot 2^{-n}], j = 0, 1, \ldots, 2^n - 1$ er like stor for alle de $2^n$ linjestykkene. Hvis vi lar $n$ gå mot uendelig får vi $U_n \to U$. Vi kan derfor se at U er uniformt fordelt, som vil si at sannsynligheten er identisk for at $U \in \{x\}$ for alle $x \in [0, 1]$. Når vi har en uniformt fordelt tilfeldig variabler med utfallsrom [0, 1], ser vi at vi må ha $P(U \leq u) = u$ slik at $P(U \leq 0) = 0$ og $P(U \leq 1) = 1$.

## 8

Utfallsrommet til ett myntkast kan være {0, 1}. Da kan vi definere observatoren T som funksjonen

$$T(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 1/2 \\ 1 & x > 1/2 \end{cases}.$$

I tilfellet med 2 myntkast kan utfallsrommet være {00, 01, 10, 11}. Hvis vi bruker binærrepresentasjonen fra de tidligere oppgavene kan dette rommet også skrives som {0, 0.25, 0.5, 0.75}. Da blir T lik funksjonen

$$T(x_1, x_2) = \begin{cases} 0 & x_1 \leq 1/2, x_2 \leq 1/2 \\ 0.25 & x_1 \leq 1/2, x_2 > 1/2 \\ 0.5 & x_1 > 1/2, x_2 \leq 1/2 \\ 0.75 & x_1 > 1/2, x_2 > 1/2 \end{cases}.$$

Mer generelt kan vi skrive T = U, hvor U er observatoren fra oppgave 7, og funksjonen $\mathrm{B_i}$ er en tilfeldig variabel som beskriver myntkast nr. i. Uttrykket for U kan også generaliseres til en uendelig følge med myntkast.

## 9

Hensikten med å definere presist hva f.eks 1m og 1kg er, er blant annet reprodusibilitet. Vitenskapen baserer seg på at vi lager hypoteser og matematiske modeller, som vi så kan teste om stemmer i forskjellige vitenskapelige eksperimenter. For å få til å gjøre disse eksperimentene er vi nødt til å ha gode definisjoner av alle de fysiske størrelsene som er involvert. Og hvis vi gjentar et eksperiment flere ganger må vi være sikre på at det faktisk er det samme eksperimentet, altså at de fysiske størrelsene er de samme som tidligere ganger. Dette trengs også for at vitenskap skal kunne kommuniseres ut i verden til andre forskere som ønsker å gjøre liknende forsøk, og lære av dem.

En annen hensikt er økonomiske hensyn. Hvis du som kunde i en butikk kjøper 1 kg med epler, vil du gjerne være helt sikker på at du faktisk får det du betaler for.

Det finnes svært mange andre gode grunner for å ha en klar definisjon av standardiserte enheter. Hensikten med ISO GUM er å bidra med å skape gode felles standarder for målinger og kommunikasjon av forskjellige fysiske størrelser, slik at det skal bli lettere for alle som trenger det å ha en felles enighet om de standardiserte enhetene.

## 10

Notasjonen her betyr at målingen har gitt at tyngdens akselerasjon er 9.81 $\mathrm{m/s^2}$, men med en usikkerhet i målingen på 0.05 $\mathrm{m/s^2}$.