Løsningsforslag øving 6

6.1

Utfallsrommet Ω består kun av tre forskjellige punkter. Vi genererer da hendelsesfamilien $\mathcal{E}$ som inneholder alle delmengder av Ω. Vi gir de tre punktene navnene A = (1, 2, 0), B = (2, 1, 3) og C = (4, 1, 1). Da er $\mathcal{E}$ = {A, B, C, A ∪ B, A ∪ C, B ∪ C, A ∪ B ∪ C (= Ω), ∅}. Vi ser at Y(A) = 3, Y(B) = 6 og Y(C) = 6. For å finne fordelingen til observatoren Y må vi også ha definert en fordeling for Ω. Det mest naturlige er å bruke uniformfordelingen, som vil si at P(A) = P(B) = P(C) = 1/3. Fordelingen $\mathrm{P_Y}$ til observatoren Y er definert slik at for en hver hendelse H ∈ R så er $\mathrm{P_Y}$(H) = P(ω : Y(ω) ∈ H). Da får vi blant annet $\mathrm{P_Y}$({6}) = P(B ∪ C) = 2/3 og $\mathrm{P_Y}$({4}) = P(A) = 1/3. Den fulle fordelingen blir

$$P_Y(H) = \begin{cases} 0, & 4 \notin H, 6 \notin H \\ 1/3, & 4 \in H, 6 \notin H \\ 2/3, & 4 \notin H, 6 \in H \\ 1, & 4 \in H, 6 \in H \end{cases}$$

Vi kan se at funksjonen Y er en observator. Kravet for å være en observator er at $(Y \in H)$ er en hendelse for alle hendelser H. Siden Y er en såpass enkel funksjon kan vi her beskrive mengden $(Y \in H)$ for alle hendelser H. Vi får

$$(Y \in H) = \begin{cases} \emptyset & 4 \notin H, 6 \notin H \\ A & 4 \in H, 6 \notin H \\ B \cup C & 4 \notin H, 6 \in H \\ \Omega & 4 \in H, 6 \in H. \end{cases}$$

Vi ser at alle disse mengdene er hendelser i $\mathcal{E}$. Derfor er Y en observator. Funksjonen Y er også en tilfeldig variabel. Dette er fordi utfallsrommet til Y er den reelle linjen R.

6.8

Det er totalt $5 \cdot 4 = 20$ mulige posisjoner for deg og vennen. Av disse er det 2 mulige posisjoner som gir avstand 3, 4 mulige posisjoner som gir avstand 2, 6 mulige posisjoner som gir avstand 1 og 8 mulige posisjoner som gir avstand 0. Tettheten til den tilfeldige variabelen blir

$$P(Y) = 1/10I(Y = 3) + 2/10I(Y = 2) + 3/10I(Y = 1) + 4/10I(Y = 0),$$

med indikatorfunksjonen

$$I(y = a) = \begin{cases} 1 & y = a \\ 0 & ellers. \end{cases}$$

6.12

- Fordelingsfunksjonen $F_X(x)$ er definert som $P(X \leq x) = P(\omega : X(\omega) \in (-\infty, x])$. Av definisjonen for en sannsynlighet P vet vi at P(A) $\geq$ 0 for alle hendelser A. Vi vet også at P(Ω) = 1, og P(A) $\leq$ P(B) for A $\subset$ B. Siden alle hendelser er inkludert i Ω betyr det at P(A) $\leq$ p(Ω) = 1 for alle hendelser A. Derfor er 0 $\leq$ $F_X(x)$ $\leq$ 1 for alle x $\in$ R.

- $\lim_{x\to\infty} F_X(x) = P(\omega : X(\omega) \in (-\infty, \infty)) = P(\omega : X(\omega) \in \Omega) = P(\Omega) = 1$. På den andre siden ser vi at $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = \lim_{x\to-\infty} P(\omega : X(\omega) \in (-\infty, x]) = \lim_{x\to-\infty} 1 - P(\omega : X(\omega) \in (x, \infty)) = 1 - P(\Omega) = 1 - 1 = 0$.

- Hvis $F_X(x)$ er monotont voksende betyr det at $F_X(x) \leq F_X(y)$ for y > x. Dette kan vi se fordi P(A) $\leq$ P(B) for alle A $\subset$ B, og hvis y > x er også (-∞, x] $\subset$ (-∞, y], som betyr at $F_X(x) \leq F_Y(y)$.

- La x_n være en synkende sekvens som konvergerer nedover mot x. Da vil også $\lim_{n\to\infty} F_X(x_n) = \lim_{n\to\infty} P(-\infty, x_n] = p(-\infty, x] = F_X(x)$. Derfor er F_X kontinuerlig fra høyre.

6.19

Vi kan bruke utfallsrommet $\Omega = \{(x, y) : x \in \{0, 1\}, y \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$. Da kan funksjonen X defineres som

$$X(\omega) = X(x, y) = x,$$

og Y kan defineres som

$$Y(\omega) = Y(x, y) = y.$$

Fordelingsfunksjonen $F_{X,Y}(1, 2) = P(\omega : X(\omega) \leq 1, Y(\omega) \leq 2) = 1 \cdot 2/6 = 1/3$. Dette vil si at sannsynligheten for å få én eller færre kronesider, samt to eller færre øyne på terningen er lik 1/3. Grafen til $F_{X,\,Y}(x, y)$ vil være lik 0 for x < 0, så vil vi få et hopp ved x = 0 og x = 1. Resten av grafen er flat i x-retning. I y-retning er det det samme, men vi vil få hopp både ved y = 1, y = 2, y = 3, y = 4, y = 5 og y = 6.

6.22

Vi antar at levetidene til de fire lyspærene er uavhengige av hverandre. Da har vi at

$$f_{X_1,X_2,X_3,X_4}(x_1, x_2, x_3, x_4) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) f_{X_3}(x_3) f_{X_4}(x_4)$$

Vi får

$$f_{X_1,X_2,X_3,X_4}(x_1, x_2, x_3, x_4) = 10^{-12} \exp\{-10^{-3} \sum_{i=1}^{4} x_i\}.$$

Sannsynligheten for at én av lyspærene fortsatt lyser etter 1050 timer er

$$p = \int_{1050}^{\infty} f_X(x)dx = -e^{-\frac{x}{1000}}\Big|_{1050}^{\infty} = e^{-\frac{1050}{1000}} \approx 0.35.$$

Sannsynligheten for at alle fire lyspærene fortsatt lyser etter 1050 timer er derfor $p^4 \approx 0.015$.

7.1

1_A er en enkel tilfeldig variabel som har verdi 1 når $\omega \in \mathrm{A}$ og verdi 0 når $\omega \notin \mathrm{A}$. Dette vil si at 1_A er Bernoullifordelt, og har forventning $\mathrm{E}\ 1_\mathrm{A} = 1 \cdot \mathrm{P(A)} + 0 \cdot \mathrm{P(A^c)} = \mathrm{P(A)}$.

7.3

Når T er en enkel observator betyr det at den tar tellbart mange verdier. Da får vi

$$\begin{aligned} E\phi(T) &= \int \phi(T(\omega))P(d\omega) = \sum_t \int_{(\omega:T(\omega)=t)} \phi(T(\omega))P(d\omega) \\ &= \sum_t \phi(t) \int_{(\omega:T(\omega)=t)} P(d\omega) = \sum_t \phi(t)P(\omega : T(\omega) = t) = E_T\phi. \end{aligned}$$

7.7

Vi har $\mathrm{E(3X_1 + 4X_2 + 2X_3) = 3E(X_1) + 4E(X_2) + 2E(X_3)}$. Vi kan altså regne ut forventningsverdien til $\mathrm{X_1}$, $\mathrm{X_2}$ og $\mathrm{X_3}$ hver for seg. Vi får

$$EX_1 = \sum_{x=0}^{6} x \cdot f_{X_1}(x) = \sum_{x=0}^{6} x \binom{6}{x} \left(\tfrac{1}{3}\right)^x \left(\tfrac{2}{3}\right)^{6-x}$$

Øving 6

$$= \sum_{x=1}^{6} x \cdot \frac{6!}{x!(6-x)!} \left(\tfrac{1}{3}\right)^x \left(\tfrac{2}{3}\right)^{6-x} + \underbrace{0 \cdot \frac{6!}{0!(6-0)!} \left(\tfrac{1}{3}\right)^0 \left(\tfrac{2}{3}\right)^6}_{=0}$$

$$= \sum_{x=1}^{6} \frac{6!}{(x-1)!(6-x)!} \left(\tfrac{1}{3}\right)^x \left(\tfrac{2}{3}\right)^{6-x}, \quad \text{fordi } \frac{x}{x!} = \frac{1}{(x-1)!}$$

$$\overset{y=x-1}{=} \sum_{y=0}^{5} \frac{6!}{y!(5-y)!} \left(\tfrac{1}{3}\right)^{y+1} \left(\tfrac{2}{3}\right)^{5-y}$$

$$= 6 \cdot \left(\tfrac{1}{3}\right) \cdot \sum_{y=0}^{5} \frac{5!}{y!(5-y)!} \left(\tfrac{1}{3}\right)^y \left(\tfrac{2}{3}\right)^{5-y}.$$

Vi kjenner igjen uttrykket inne i summetegnet som sannsynlighetstettheten til en binomisk fordeling.

For en diskret sannsynlighetstetthet f er det kjent at $\sum_{y=-\infty}^{\infty} f(y) = 1$. Vi får derfor $\sum_{y=0}^{5} \frac{5!}{y!(5-y)!} \left(\tfrac{1}{3}\right)^y \left(\tfrac{2}{3}\right)^{5-y} = 1$

Da er $EX_1 = 6 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = \underline{\underline{2}}$

$$EX_2 = \sum_{x=0}^{\infty} x \cdot f_{X_2}(x) = \sum_{x=0}^{\infty} x\, e^{-4} \frac{4^x}{x!}$$

$$= \sum_{x=1}^{\infty} e^{-4} \frac{4^x x}{x!} + \underbrace{0 \cdot e^{-4} \frac{4^0}{0!}}_{=0}$$

$$= \sum_{x=1}^{\infty} e^{-4} \frac{4^x}{(x-1)!}$$

$$\overset{y=x-1}{=} \sum_{y=0}^{\infty} e^{-4} \frac{4^{y+1}}{y!} = 4 \cdot \sum_{y=0}^{\infty} e^{-4} \frac{4^y}{y!}$$

$$= 4 \cdot \sum_{y=0}^{\infty} f_{X_2}(y) = 4 \cdot 1 = \underline{\underline{4}}$$

Øving 7

$$EX_3 = \int_0^\infty x f_{X_3}(x)\,dx = \int_0^\infty x \cdot 5e^{-5x}\,dx$$

$$= x \cdot \frac{5}{-5} e^{-5x} \Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-5x}\,dx$$ (bruker delvis integrasjon)

$$= -0 + 0 + \frac{1}{-5} e^{-5x} \Big|_0^\infty$$

$$= -0 + \frac{1}{5} = \underline{\underline{\frac{1}{5}}}$$

Totalt finner vi da at $E(X) = E(3X_1 + 4X_2 + 2X_3) = 3 \cdot 2 + 4 \cdot 4 + 2 \cdot (1/5) = 22.4$

7.13

$$\begin{aligned}
Var(aX + bY) &= E[((aX + bY) - E[aX + bY])^2] \\
&= E[((aX - E[aX]) + (bY - E[bY]))^2] \\
&= E[(a(X - E[X]) + b(Y - E[Y]))^2]E[a^2(X - E[X])^2 + b^2(Y - E[Y])^2 \\
&- 2ab(X - E[X])(Y - E[Y])] \\
&= a^2E[(X - E[X])^2] + b^2E[(Y - E[Y])^2] - 2abE[(X - E[X])(Y - E[Y])] \\
&= a^2Var(X) + b^2Var(Y) - 2ab(E[XY] - 2E[X]E[Y] + E[X]E[Y]) \\
&= a^2Var(X) + b^2Var(Y) - 2ab(E[XY] - E[X]E[Y]).
\end{aligned}$$

Hvis X og Y er uavhengige får vi at $E[XY] = E[X]E[Y]$. Da vil det siste leddet kanselleres, og regneregelen stemmer.

7.18

Den momentgenererende funksjonen er $\mathrm{M_X = E[e^{tX}]}$. For Poisson-fordelingen får vi

$$\begin{aligned}
M_x = E[e^{tX}] &= \sum_{x=0}^{\infty} e^{xt} e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} \\
&= \sum_{x=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{(e^t\lambda)^x}{x!} \\
&= \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{-e^t\lambda}}{e^{-e^t\lambda}} e^{-\lambda} \frac{(e^t\lambda)^x}{x!} \\
&= \frac{e^{-\lambda}}{e^{-e^t\lambda}} \sum_{x=0}^{\infty} e^{-e^t\lambda} \frac{(e^t\lambda)^x}{x!}.
\end{aligned}$$

Vi kjenner igjen uttrykket $e^{-e^t\lambda}\frac{(e^t\lambda)^x}{x!}$ som sannsynlighetstettheten $\tilde{f}$ til en Poisson-fordeling med parameter $\tilde{\lambda} = e^t\lambda$. Det er kjent at alle diskrete sannsynlighetsfordelinger kan summeres til 1. Vi får derfor $\sum_{x=0}^{\infty} \tilde{f}(x) = 1$. Da blir

$$M_X = \frac{e^{-\lambda}}{e^{-e^t\lambda}} \cdot 1 = e^{\lambda(e^t-1)}.$$

Vi har

$$M'_X(t) = e^{\lambda(e^t-1)} \cdot \lambda e^t,$$

og

$$M''_X(t) = e^{\lambda(e^t-1)} \cdot \lambda e^t(\lambda e^t + 1).$$

Dette gir $E[X] = M'_X(0) = \lambda$, og $E[X^2] = M''_X(0) = \lambda^2 + \lambda$. Da får vi $Var(X) = E[X^2] - E[X]^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$.