Løsningsforslag øving 7

7.2

Vi trekker brikker fra urnen med tilbakelegging, som vil si at sannsynligheten for å trekke en rød brikke er identisk lik $p = (5/9)$ for hvert trekk. Da er antall røde brikker X vi får når vi trekker 3 brikker med tilbakelegging binomisk fordelt, $f_X(x) = \binom{3}{x} p^x (1-p)^{3-x}$. I forrige øving (oppgave 7.7) fant vi at hvis en tilfeldig variabel X er binomisk fordelt med parametre n og p så er $EX = np$. Vi får derfor $EX = 3 \cdot (5/9) = (5/3)$. Vi vet også at variansen til X kan skrives som $\mathrm{Var}(X) = EX^2 - (EX)^2$. Vi kan derfor finne variansen til X ved å regne ut EX^2. Vi får

$$
\begin{aligned}
EX^2 &= \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} x^2 \\
&= \sum_{x=1}^{n} \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x} x^2 + 0 \\
&= \sum_{x=1}^{n} \frac{n!}{(x-1)!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x} x \\
&\overset{y=x-1}{=} \sum_{y=0}^{n-1} \frac{n!}{y!((n-1)-y)!} p^{y+1} (1-p)^{(n-1)-y} (y+1) \\
&= np \cdot \sum_{y=0}^{n-1} \frac{n!}{y!((n-1)-y)!} p^{y} (1-p)^{(n-1)-y} (y+1) \\
&= np \left(\sum_{y=0}^{n-1} \frac{n!}{y!((n-1)-y)!} p^{y} (1-p)^{(n-1)-y} y + \sum_{y=0}^{n-1} \frac{n!}{y!((n-1)-y)!} p^{y} (1-p)^{(n-1)-y} \cdot 1 \right).
\end{aligned}
$$

Her ser vi at det høyre leddet er summen over en binomisk sannsynlighetstetthet, som vi vet at summerer til 1. Det venstre leddet er derimot det samme som forventningsverdien til en binomisk fordeling med paramtere $(n-1)$ og p. Vi får da

$$EX^2 = np((n-1)p + 1).$$

Dette gir til slutt

$$\mathrm{Var}(X) = EX^2 - (EX)^2 = n(n-1)p^2 + np - (np)^2 = np - np^2 = np(1-p),$$

som i vårt tilfelle gir $\mathrm{Var}(X) = 20/27$.

7.4

X er uniformt fordelt på intervallet $[a, b]$. Da er sannsynlighetstettheten til X lik

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \cdot I(x \in [a, b]),$$

der I er en indikatorfunksjon. Vi finner da forventningsverdien

$$\begin{aligned}
EX &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_{a}^{b} x \frac{1}{b-a} dx \\
&= \frac{1}{2} x^2 \frac{1}{b-a}\bigg|_a^b = \frac{1}{2}\frac{b^2-a^2}{b-a} = \frac{1}{2}\frac{(b-a)(b+a)}{b-a} \\
&= \frac{1}{2}(a+b).
\end{aligned}$$

Dette gir mening med tanke på den geometriske tolkningen av forventningsverdi, siden $(a+b)/2$ er midtpunktet av intervallet $[a, b]$.

7.5

P er kontinuerlig, som betyr at den har en tetthet f. For to tilfeldige variable X og Y får vi tettheten $f_{X,Y}(x, y)$ slik at $\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(x, y) dy dx = P((X \leq x) \cap (Y \leq y))$. Da er forventningsverdien til $aX + bY$ lik

$$\begin{aligned}
E[aX + bY] &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (ax + by) f_{X,Y}(x, y) dx dy \\
&= a \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x f_{X,Y}(x, y) dx dy + b \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y f_{X,Y}(x, y) dx dy \\
&= a \int_{-\infty}^{\infty} x \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dy\right] dx + b \int_{-\infty}^{\infty} y \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dx\right] dy \\
&= a \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx + b \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy \\
&= aEX + bEY.
\end{aligned}$$

Merk at grunnen til at vi kan finne forventningsverdien ved å integrere over x og y er på grunn av substitusjonsformelen, som betyr at vi slipper å integrere over ω. Dette vises blant annet i teorem 3.9.1 i Larsen-Marx.

7.6

Vi lar $\mathrm{Y_i}$ være antall øyne fra terningkast nr i. Da er $\mathrm{Y_i}$ uniformt fordelt, og

$$E[Y_i] = \sum_{i=1}^{6} i \cdot \frac{1}{6} = 3.5.$$

Vi lar nå X $= \sum_{\mathrm{i}\,=\,1}^{10}$ være antall øyne etter ti kast. Da er

$$E[X] = E[\sum_{i=1}^{10} Y_i] = \sum_{i=1}^{10} E[Y_i] = 10 \cdot 3.5 = 35,$$

siden E er lineær.

7.8

I en kortstokk er det 4 ess og 52 kort totalt. Sannsynligheten for å dra et ess på første forsøk er da 4/52. Sannsynligheten for et ess på andre forsøk er lik sannsynligheten for å ikke dra et ess på første forsøk ganget sannsynligheten for å dra et ess på andre forsøk, er (48/52) · (4/51). Videre er sannsynligheten for å dra et ess på tredje forsøk lik (48/52) · (47/51) · (4/50), osv. Hvis X er antall kort som må deles ut før det kommer et ess får vi altså

$$P(X = x) = \begin{cases} \frac{4}{52} & x = 0 \\ \frac{4}{52-x} \cdot \prod_{i=0}^{x-1} \frac{48-i}{52-i} & 0 < x \leq 48 \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

Dette kan skrives om som

$$\begin{aligned} P(X = x) &= \frac{4}{52 - x} \frac{48!}{(48 - x)!} \frac{(52 - x)!}{52!} \\ &= \frac{4 \cdot 48!}{52!} \frac{(51 - x)!}{(48 - x)!} \\ &= \frac{1}{1624350} (51 - x)(50 - x)(49 - x), \end{aligned}$$

for x = 0, . . . , 48.
Dette gir

$$E[X] = \sum_{x=0}^{48} x \cdot P(X = x) = \sum_{x=1} \frac{1}{1624350} x(51 - x)(50 - x)(49 - x)$$

Vi bruker et regneverktøy til å regne ut denne summen, og får en forventningsverdi på 9.6

```
f <- function(x) (51 - x) * (50 - x) * (49 - x) / 1624350
e <- function(x) x * f(x)
s <- 0
for (x in 0:48) s <- s + e(x)
s
```

```
[1] 9.6
```

Dette betyr at hvis vi gjentar forsøket vårt uendelig mange ganger så vil det i snitt trekkes 9.6 kort før første ess.

8.1

For eksperimentet gitt ved at to brikker trekkes fra urnen så er utfallsrommet $\Omega = \{R, H\}^2$, og hendelsesfamilien består av alle delmengder av Ω. Vi antar at hvilke brikke vi trekker er uniformt fordelt. Da er

$$\begin{aligned}P(\{(R,H)\}) = P(\{(H,R)\}) &= \frac{4\cdot 3}{7\cdot 6} = \frac{6}{21}\\ P(\{(R,R)\}) &= \frac{4\cdot 3}{7\cdot 6} = \frac{6}{21}\\ P(\{(H,H)\}) &= \frac{3\cdot 2}{7\cdot 6} = \frac{3}{21}.\end{aligned}$$

X er antall røde brikker som blir trukket. Da er $P(X = 0) = 3/21$, $P(X = 1) = 12/21$ og $P(X = 2) = 6/21$. Siden Y = 2X - 1 har vi $P(Y = -1) = P(X = 0) = 3/21$, $P(Y = 1) = P(X = 1) = 12/21$ og $P(Y = 3) = P(X = 2) = 6/21$. Funksjonen X er definert som $X(\omega) = \sum_{\omega_i} I(\omega_i = R)$, hvor I er en indikatorfunksjon.

8.2

Y er en funksjon av T slik at $Y = aT + b$, med $a = (5/9)$ og $b = -32 \cdot (5/9)$. Da kan vi bruke formelen fra tidligere i notatet.

$$\begin{aligned}f_Y(y) &= f_T\left(\frac{y + 160/9}{5/9}\right)\frac{9}{5}\\ &= 9\frac{9y+160}{25}\exp\left\{-\frac{(9y-160)^2}{50}\right\}.\end{aligned}$$

8.3

i) Vi definerer den tilfeldige variabelen Z = X + Y. Da er $0 < Z < 2$. Vi bruker konvulsjonsformelen og får tettheten

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, z-x)dx = \int_{\max\{0,z-1\}}^{\min\{1,z\}} dx = \min\{1, v\} - \max\{0, z-1\}.$$

som blir til

$$f_Z(z) = \begin{cases} z & 0 < z \leq 1 \\ 2 - z & 1 < z < 2. \end{cases}$$

ii) Vi definerer Z = XY. Da er 0 < Z < 1. Hvis vi har Z < z betyr det at Y må være mindre enn (z / X). Pga fordelingen til X og Y vet vi også at vi må ha 0 < Y < 1. Da får vi 0 < Y < min{1, z/X}. Dette gir

$$
\begin{aligned}
P(XY \leq z) &= \int_0^1 \int_0^{\min\{1,z/x\}} f_{X,Y}(x,y)dydx \\
&= \int_0^1 \int_0^{\min\{1,z/x\}} dydx \\
&= \int_0^1 \min\{1, z/x\}dx \\
&= \int_0^z dx + \int_z^1 z/xdx \\
&= z + (0 - z\log z) = z - z\log z.
\end{aligned}
$$

For å finne tettheten til Z = XY må vi derivere den kumulative fordelingsfunksjonen med hensyn på z. Da får vi

$$f_Z(z) = 1 - \log z - (z/z) = \log(1/z),\ 0 < z < 1.$$

iii) Nå definerer vi Z = X/Y. Da er Z > 0. Hvis vi har Z < z betyr det at Y må være større enn X/z og mindre enn 1. Da får vi

$$
\begin{aligned}
P((X/Y) \leq z) &= \int_0^1 \int_{\min\{1,x/z\}}^1 f_{X,Y}(x,y)dydx \\
&= \int_0^1 \int_{\min\{1,x/z\}}^1 dydx \\
&= \int_0^1 (1 - \min\{1, x/z\})dx \\
&= \int_0^{\min\{1,z\}} (1 - x/z)dx \\
&= \begin{cases} \frac{1}{2}z, & z \leq 1 \\ 1 - \frac{1}{2z}, & z > 1 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Ved å derivere den kumulative fordelingsfunksjonen får vi

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & z \leq 1 \\ \frac{1}{2z^2}, & z > 1. \end{cases}$$

8.6

Ventetiden din er uniformfordelt, $f(t) = (1/10)$ og $F(t) = (t/10)$ for $0 < t < 10$. Da er sannsynligheten for at ventetiden en gitt dag er mindre enn 5 minutter lik 0.5. Siden sannsynlighetstettheten for ventetiden er uavhengig og identisk hver dag kan vi beskrive antall ganger vi må vente mindre enn 5 minutter med den binomiske fordelingen $f(x) = \binom{n}{x}(0.5)^n$. Hendelsen at din nest lengste ventetid er mindre enn 5 minutter er den samme som hendelsen at vi venter mindre enn 5 minutter minst 3 av de 4 gangene vi er i banken. Sannsynligheten for dette blir derfor lik

$$P = \left(\binom{4}{3} + \binom{4}{4}\right) \cdot (1/2)^4 = 5/16.$$

(Merk: Her kunne man også brukt fordelingen til en ordningsvariabel for å løse oppgaven, men det er mye mer tungvint.)

8.7

Vi vet at $f_{X,Y}(x,y) = f_{Y|X}(x,y) \cdot f_X(x) = \frac{1}{3}(2y+4x)$. Da kan vi finne marginaltettheten f_Y til Y ved å integrere ut X. Vi får

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{3}(2y+4x)dx \\ &= \frac{1}{3}(2yx+2x^2)\Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{3}(2y+2) \\ &= \frac{2}{3}(y+1). \end{aligned}$$