Løsningsforslag øving 8

6.2

Fordelingen P_T til en observator er definert som $P_T(A) = P(\omega : T(\omega) \in A)$. Siden T er en observator så må $(\omega : T(\omega) \in A)$ være en hendelse for alle hendelser A, og siden P er en sannsynlighetsfordeling må vi derfor ha at $P_T(A) \geq 0$ for alle hendelser A. Det er også klart at $P_T(\Omega_T) = P(\omega : T(\omega) \in \Omega_T) = P(\Omega) = 1$. Til slutt må vi bevise at P_T oppfyller addisjonsloven. Det er klart at hvis $A_1, A_2 \subset \Omega_T$ er disjunkte hendelser så er det ikke mulig å finne en ω_0 slik at både $T(\omega_0) \in A_1$ og $T(\omega_0) \in A_2$, siden $T(\omega)$ kun er ett enkelt element i Ω_{T}. Derfor får vi at de to hendelsene $(\omega : T(\omega) \in A_1)$ og $(\omega : T(\omega) \in A_2)$ er disjunkte hendelser. Dette kan generaliseres til en tellbar mengde hendelser, og vi får

$$P_T(\uplus_n A_n) = P(\uplus_n(\omega : T(\omega) \in A_n)) = \sum_n P(\omega : T(\omega) \in A_n) = \sum_n P_T(A_n).$$

Alle tre kravene for en sannsynlighetstetthet er oppfylt, så P_T er en sannsynlighetstetthet.

6.3

Hvis en observator T tar et tellbart antall verdier $t_1, t_2, \ldots$, får vi at sannsynligheten $P(T \in A)$ for en hendelse A kan beskrives kun ved hjelp av de mulige verdiene til T. Hvis ingen av verdiene $t_1, t_2, \ldots$ ligger i hendelsen A så er sannsynligheten $P(T \in A) = 0$. Hvis derimot f.eks verdiene t_4 og t_{221} ligger i A så er $P(T \in A) = P(T \in \{t_4, t_{221}\}) = P(T = t_4) + P(T = t_{221})$, siden $P(T \in A \setminus \{t_4, t_{221}\}) = 0$. Generelt kan vi bruke det tellbare indekssettet $\mathcal{I}_A$ for å beskrive hvilke av verdiene til T som ligger i en hendelse A. Da får vi, for alle hendelser A,

$$P(T \in A) = P(\cup_{i \in \mathcal{I}_A}(T = t_i)) = \sum_{i \in \mathcal{I}_A} P(T = t_i).$$

Fra side 26 i notatet ser vi at dette er definisjonen på en diskret fordeling, at sannsynligheten for alle hendelser kan uttrykkes som en tellbar sum over sannsynlighetstettheten $f(t) = P(T = t)$. Derfor er fordelingen til observatoren en diskret fordeling.
Utfallsrommet til observatoren må absolutt ikke være diskret. Vi kan alltid velge det utfallsrommet Ω vi måtte ønske. Hvis vi velger et utfallsrom som er "for stort" med tanke på eksperimentet vårt, kan dette likevel spisses inn ved et godt valg av en hendelsesfamilie og en sannsynlighetsfordeling over Ω.

6.4

i)

$$(T \in A^c) = (\omega : T(\omega) \in A^c) = (\omega : T(\omega) \notin A) = (\omega : T(\omega) \in A)^c = (T(\omega) \in A)^c.$$

ii)

$(T \in \cup_i A_i) = (\omega : T(\omega) = \cup_i A_i) = (\omega : T(\omega) \in A_1) \cup (\omega : T(\omega) \in A_2) \cup \ldots = \cup_i (\omega : T(\omega) \in A_i) = \cup_i (T \in A_i).$

6.7

Her er det ikke oppgitt hvilke hendelsesfamilie som er gitt. Likevel kan vi anta at når noe annet ikke er oppgitt så er hendelsesfamilien for $\mathbb{R}$ den minste hendelsesfamilien som inneholder alle intervaller i $\mathbb{R}$. For denne hendelsesfamilien er det klart at både $[0, 1]$ og $[10, 15]$ er hendelser, siden begge to er intervaller i $\mathbb{R}$. Vi vet også at hendelsesfamilier er lukket under tellbar union, som betyr at unionen $[0, 1] \cup [10, 15]$ også er en hendelse.

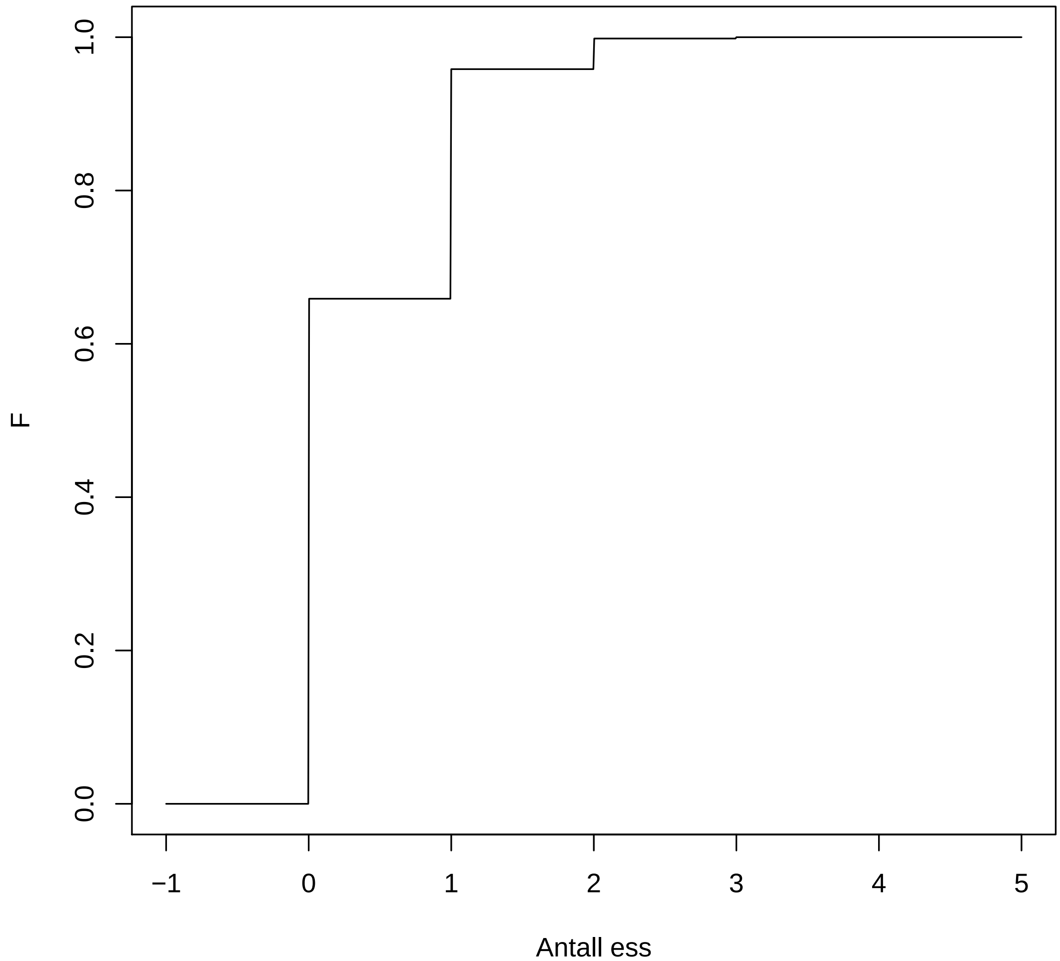
6.9

Y er antall ess en pokerspiller mottar blant de fem første kortene. Siden det kun finnes fire ess er det klart at $Y \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Det finnes totalt $N = \binom{52}{5}$ mulige kombinasjoner av en pokerhånd på fem kort. Antall mulige kombinasjoner av en pokerhånd med i ess er $\binom{4}{i}\binom{48}{5-i}$, som gir

$$P(Y = i) = \frac{\binom{4}{i}\binom{48}{5-i}}{\binom{52}{5}}.$$

Vi tegner fordelingsfunksjonen ved hjelp av `R`.

```
p <- function(i) if (i %in% 0:4) choose(4, i) * choose(48, 5 - i) / choose(52, 5) else 0
F <- function(x) if (x < 0) 0 else sum(sapply(0:floor(x), p))
x <- seq(-1, 5, length = 1000)
y <- sapply(x, F)
plot(x, y, "l", xlab = "Antall ess", ylab = "F")
```



7.10

Vi antar at $X_1, \ldots, X_n$ er uavhengige og kontinuerlig fordelte variabler. Siden variablene er kontinuerlige har de alle tettheter. Det er kjent at for uavhengige tilfeldige variabler $X,\ Y$ med tettheter

$f_X(x),\ f_Y(y)$ så er $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$. Da får vi

$$\begin{aligned}
E[X_1 \cdots X_n] &= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} x_1 \cdots x_n \cdot f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n) dx_1 \cdots dx_n \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} x_1 \cdots x_n \cdot f_{X_1}(x_1) \cdots f_{X_n}(x_n) dx_1 \cdots dx_n \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x_n f_{X_n}(x_n) \left[\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \left[\int_{-\infty}^{\infty} x_2 f_{X_2}(x_2) \left[\int_{-\infty}^{\infty} X_1 f_{X_1}(x_1) dx_1 \right] dx_2 \right] \cdots \right] dx_n \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x_n f_{X_n}(x_n) \left[\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \left[\int_{-\infty}^{\infty} x_2 f_{X_2}(x_2) \cdot E[X_1] dx_2 \right] \cdots \right] dx_n \\
&= \cdots = E[X_n]E[X_{n-1}] \cdots E[X_1].
\end{aligned}$$

Vi antar at $\phi(X_1, X_2)$ og $\psi(X_3)$ er tilfeldige variabler. For at disse skal være uavhengige må vi ha at $P(\phi(X_1, X_2) \in A \cap \psi(X_3) \in B) = P(\phi(X_1, X_2) \in A)P(\psi(X_3) \in B)$ for alle hendelser A og B. Vi bruker at forventningsverdien $E[I_A]$ til en indikatorfunksjon for hendelsen A er lik $E[I_A] = P(A)$. Da får vi, på grunn av variabelskifteteoremet

$$\begin{aligned}
P(\phi(X_1, X_2) \in A \cap \psi(X_3) \in B) &= E[I(\phi(X_1, X_2) \in A \cap \psi(X_3) \in B)] \\
&= \int \int \int I(\phi(x_1, x_2) \in A \cap \psi(x_3) \in B) f_{X_1,X_2,X_3}(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3 \\
&= \int \int \int I(\phi(x_1, x_2) \in A) \cdot I(\psi(x_3) \in B) f_{X_1,X_2}(x_1, x_2) f_{X_3}(x_3) dx_1 dx_2 dx_3 \\
&\quad \text{(på grunn av uavhengigheten mellom } X_1,\ X_2 \text{ og } X_3) \\
&= \int \int I(\phi(x_1, x_2) \in A) f_{X_1,X_2}(x_1, x_2) \left[\int I(\psi(x_3) \in B) f_{X_3}(x_3) dx_3 \right] dx_1 dx_2 \\
&= \int \int I(\phi(x_1, x_2) \in A) f_{X_1,X_2}(x_1, x_2) \cdot P(\psi(X_3) \in B) dx_2 dx_3 \\
&= P(\phi(X_1, X_2) \in A) P(\psi(X_3) \in B).
\end{aligned}$$

Altså er $\phi(X_1, X_2)$ og $\psi(X_3)$ uavhengige tilfeldige variabler.

7.11

X er en tilfeldig variabel med tetthet $f(x) = 2/x^3,\ x > 1$. Vi finner

$$E[X] = \int_1^{\infty} 2x^{-2} dx = -2x^{-1} \Big|_1^{\infty} = 0 + 2 = 2.$$

X har altså en endelig forventningsverdi på 2. For å finne variansen til X må vi regne ut $E[X^2]$. Vi får

$$E[X^2] = \int_1^{\infty} 2x^{-1} dx = 2 \log x \Big|_1^{\infty} = \infty - 0 = \infty.$$

Siden det andre momentet til X er uendelig har ikke X en endelig varians.

7.18

$$
\begin{aligned}
M_X(t) = E[e^{Xt}] &= \sum_{x=0}^{\infty} e^{xt} e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} \\
&= \sum_{x=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{(e^t\lambda)^x}{x!} \\
&= e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(e^t\lambda)^x}{x!}.
\end{aligned}
$$

Dette kjenner vi igjen som den algebraiske kjernen til en Poisson-fordeling med parameter $\tilde{\lambda} = e^t\lambda$. Vi legger derfor til den rette konstanten for å få tettheten til en Poisson-fordeling på innsiden av summetegnet.

$$
\begin{aligned}
M_X(t) &= e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(e^t\lambda)^x}{x!} \\
&= e^{-\lambda} e^{e^t\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} e^{-e^t\lambda} \frac{(e^t\lambda)^x}{x!} \\
&= e^{\lambda(e^t-1)},
\end{aligned}
$$

fordi summen over sannsynlighetstettethen summeres til 1.
Vi kan nå benytte den momentgenererende funksjonen til å finne første- og andremomentet til X.

$$
M_X'(t) = e^{\lambda(e^t-1)} \cdot \lambda e^t.
$$

$$
M_X''(t) = e^{\lambda(e^t-1)} \cdot (\lambda e^t)^2 + e^{\lambda(e^t-1)} \cdot \lambda e^t.
$$

Ved å sette inn $t = 0$ finner vi

$$
E[X] = e^{\lambda(1-1)} \cdot \lambda e^0 = \lambda.
$$

$$
E[X^2] = e^0 \cdot (\lambda e^0)^2 + e^0 \cdot \lambda e^0 = \lambda^2 + \lambda,
$$

som gir

$$
\mathrm{Var}(X) = E[X^2] - E[X]^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.
$$

7.19

Chebyshevs ulikhet sier at $P(|X-\mu| \geq t\sigma) \leq 1/t^2$. Vi kjenner igjen tettheten $f(x) = e^{-x},\ x > 0$ som tettheten til en eksponentialfordeling med parameter 1 (se f.eks "Tabeller og formler i statistikk"). Da vet vi at $E[X] = \mu = 1$ og $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2 = 1^2$. Vi setter disse inn i Chebyshevs ulikhet og finner

$$
P(|X-1| \geq 2 \cdot 1) \leq 1/2^2.
$$

En øvre skranke for at X tar en verdi mer enn 2 standardavvik unna forventningsverdien er altså 1/4. Den faktiske sannsynligheten for dette er $P(X \geq 3) = \int_3^{\infty} e^{-x} = e^{-3} \approx 0.05$, så dette er ikke en veldig god øvre skranke.

8.11

Vi kan bruke subtitusjon for å vise at $(f * g) = (g * f)$.

$$(f * g)(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(z-x)dx \overset{x^*=z-x}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(z-x^*)g(x^*)dx^* = (g * f)(z).$$