Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen: Gunnar Taraldsen (735 91454)

S101 Sannsynlighet og statistikk 1

Mandag 1. desember 1997
Kl. 9-15

Tillatte hjelpemidler: Fire håndskrevne A4-sider med instituttets stempel, kalkulator, *Statistiske tabeller og formler* (Tapir 1996)

Sensurdato: 22. desember 1997

Oppgave 1 *Lyskryss, del 1*

Øyvind kjører bil til jobben hver dag og har begynt å ergre seg over at han stadig vekk får rødt lys i det første lyskrysset han kommer til. Han bestemmer seg for å undersøke dette nærmere.

a) I løpet av 20 dager får han rødt lys 8 ganger. Estimer sannsynligheten p for rødt lys.

b) Estimer standardavviket til estimatoren for p ved hjelp av en forventningsrett estimator for variansen.

c) Beregn et tilnærmet 68% intervallestimat for p ved hjelp av sentralgrenseteoremet. Hint: Du kan anta at $\Phi(1) = 84\%$.

d) Beregn et 68% intervallestimat for p ved hjelp av lineær interpolasjon i tabellen med binomiske sannsynligheter.

Oppgave 2 *Lyskryss, del 2*

a) Øyvind tar tiden på hvor lenge han må vente de gangene han får rødt lys. Observasjonene hans er 28s, 10s, 5s, 15s, 7s, 25s, 29s, 22s. Anta at disse 8 observasjonene er et tilfeldig utvalg fra uniform$(0, a)$-fordelingen. Diskuter kort for og i mot denne antagelsen. Diskusjonen skal innledes med en liste over mulige årsaker til tilfeldighetene.

b) Estimer a ved hjelp av en forventningsrett og tilstrekkelig estimator W. Estimatoren skal være basert på den største observerte verdien.

c) Vis at W er forventningsrett.

d) Vis at W er tilstrekkelig.

Oppgave 3 *Lyskryss, del 3*

a) En hypotese er $a = 30s$, og et alternativ er $a > 30s$. Gir observasjonene grunnlag for å si at alternativet er bevist med et 5% signifikansnivå når testobservatoren er den største observerte verdien?

b) Hva er det kritiske området til testen? Hva blir det kritiske området for en test med den første observerte verdien som testobservator og hva er konklusjonen på denne testen?

c) Tegn en nøyaktig figur med grafene til styrkefunksjonene til de to testene i samme koordinatsystem. Kommenter i figurteksten.

d) Finn sannsynligheten for en type-2-feil for de to testene dersom $a = 80s$ ved hjelp av figuren. Marker på figuren hvordan svaret finnes.

e) Hva betyr denne sannsynligheten for type-2-feil i praksis dersom Øyvinds eksperiment er statistisk lovmessig? Hva betyr denne sannsynligheten dersom eksperimentet ikke er statistisk lovmessig?

Oppgave 4 *Lyskryss, del 4*

a) La R være hendelsen gitt ved at Øyvind får rødt lys. La T være tiden Øyvind bruker i lyskrysset, dvs spesielt er $T = 0$ dersom det lyser grønt. Vis at

$$P(T \leq t) = P(T \leq t|R) \cdot p + P(T \leq t|R^c) \cdot (1 - p)$$

med utgangspunkt i Kolmogorovs aksiomer og definisjonen av betinget sannsynlighet.

b) Vis at fordelingsfunksjonen til T er gitt ved

$$F(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ pt/a + (1-p) & 0 \leq t \leq a \\ 1 & t > a \end{cases}$$

Gi en begrunnelse for at T hverken er kontinuerlig eller diskret fordelt.

Oppgave 5 *Busser*

Magnar sitter på kontoret og lager løsningsforslag til en gammel eksamen i statistikk. Han ergrer seg over at ikke instituttkontoret hadde et løsningsforslag, og kjeder seg fordi han har laget slike løsningsforslag mer en én gang tidligere. I stedet for å telle sauer, så teller han 16 busser som passerer på veien utenfor kontorvinduet i løpet av 4 timer.

a) Estimer sannsynligheten for at det ikke passerer en eneste buss i løpet av 15 minutter ved å anta at antallet er poissonfordelt.

b) Spesifiser antagelser som gir at antallet busser er binomisk fordelt og bruk dette til å begrunne antagelsen om poissonfordeling.

c) Magnar har erfart mange ganger at dersom han kommer 10 minutter etter at bussen skulle ha gått, og det står andre som bekrefter at bussen ikke har kommet ennå, så er det stor sannsynlighet for at bussen snart kommer. Begrunn at denne erfaringen er i strid med antagelsen om poissonfordeling.

d) Magnar lager en bedre modell ved å anta at det med sikkerhet kommer én buss i hvert 15 minutters intervall gitt ved rutetabellen til bussen. Han antar at tettheten tilsvarende bussavgangen i et slikt intervall er lineær med størst tetthet i venstre endepunkt og null tetthet i høyre endepunkt. I tillegg antar han at bussavgangene i hvert 15 minutters intervall er uavhengige. Magnar beregner forventet ventetid som funksjon av tidspunktet han kommer til bussholdeplassen og han beregner forventet ventetid i tilfellet hvor han går til bussholdeplassen ved et tilfeldig tidspunkt. Han finner også et optimalt tidspunkt. Hva er Magnars tre resultater?