Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen: Gunnar Taraldsen
73 59 14 54

S 101 SANNSYNLIGHET OG STATISTIKK I

Fredag 6. juni 1997
Kl. 9-15
Tillatte hjelpemidler: 4 håndskrevne A4-sider; instituttets lommekalkulator
Statistiske tabeller og formler (Tapir)
Sensurfrist: Fredag 27. juni 1997

Oppgave 1 (Jente eller gutt?)

a) La Y være antall jenter født i n fødsler. Gi en begrunnelse for at $Y = Y_1 + \cdots + Y_n$, hvor Y_i-ene er uavhengige Bernoulli-variable.

b) La p være sannsynligheten for at en nyfødt unge er en jente. Gi et kombinatorisk argument for at $P(Y = y) = \binom{n}{y} p^y (1-p)^{n-y}$.

c) Når n er stor, så er Y tilnærmet normalfordelt med $E(Y) = np$ og $\mathrm{Var}(Y) = np(1-p)$. Formuler sentralgrenseteoremet og vis at dette gir denne tilnærmelsen.

d) Statistisk årbok fra 1994 oppgir at det ble født 27708 jenter og 29154 gutter i Norge i perioden 1986–1990. Benytt tilnærmelsen over til å lage en test for hypotesen $H_0\colon p = 0.50$ mot alternativet $H_1\colon p < 0.50$ med et signifikansnivå $\alpha = 1\%$. Hva er konklusjonen på testen ut fra de gitte dataene?

e) Finn det tilnærmede kritiske området for testobservatoren Y for testen.

f) Hva menes med type-I og type-II feil i testen? Hva er sannsynligheten for type-I feil i testen?

g) Tegn grafen til styrkefunksjonen γ til denne testen ved å beregne den tilnærmede sannsynligheten $\beta(p)$ for type-II feil for $p = 0$, $p = 0.49$, $p = 0.495$, $p = 0.50$.

Oppgave 2 (Potetavling)

Statistisk årbok oppgir en potetavling på 2424, 2575, 2275, 2662 (kg per dekar) i årene 1989–92.

a) Argumenter for at avlingen er normalfordelt.

b) Estimer forventningsverdien μ og standardavviket σ med de konvensjonelle estimatorene $\bar{X}$ og S.

c) Vis at estimatoren S^2 for variansen er forventningsrett.

d) Vis at $T_{n-1} = \sqrt{n}(\bar{X} - \mu)/S$ er (Student) t-fordelt med $n-1$ frihetsgrader. Du kan bruke resultater fra *Statistiske tabeller og formler.*

e) Hva menes med et 90%-konfidensintervall for μ?

f) Utled og beregn et 90%-konfidensintervall for μ.

g) Anta nå at estimatet for σ er lik σ. Beregn et 90%-konfidensintervall for μ.

h) Kommenter forskjellen på de to intervallestimatene.

Oppgave 3 **(Tilfeldige variable)**

I hele denne oppgaven skal vi la $S = [0,1]$ være utfallsrommet for et eksperiment og anta at $P([a,b]) = b - a$ når $[a,b]$ er en hendelse, d.v.s. P er den uniforme fordelingen. Vi skal videre anta at X, Z_A og Z_B er tilfeldige variable i dette eksperimentet.

a) Finn sannsynlighetstettheten f tilsvarende P og skriv ned ligningen som gir sammenhengen mellom f og P.

b) La $A = [0, 1/2]$ og $B = [0, 1/4] \cup [1/2, 3/4]$. Vis at A og B uavhengige hendelser.

c) Definer Z_A ved at den tar verdien 1 dersom utfallet s av eksperimentet er i A og verdien 0 ellers. Definer Z_B tilsvarende fra B. Hvilken kjent fordeling har $Z = Z_A + Z_B$?

d) Finn den simultane fordelingsfunksjonen f_{Z_A,Z_B} til Z_A og Z_B.

e) Finn og skisser den kumulative fordelingsfunksjonen F_Z til Z.

f) I resten av oppgaven antar vi at X er normalfordelt med $E(X) = 0$ og $\mathrm{Var}(X) = 1$. Skriv ned en formel som gir den kumulative fordelingsfunksjonen F_X. Hva er sammenhengen mellom F_X og fordelingsfunksjonen f_X?

g) Definer hva det betyr at X er en tilfeldig variabel i dette eksperimentet.

h) Skriv ned ligningen som gir sammenhengen mellom X og P. Intervallet $[0, 1]$ skal inngå i denne ligningen.