Oppgave 1

Det er begått en kriminell handling i en kommune. Av innbyggerne i kommunen er det 5000 som potensielt kan ha begått handlingen og vi skal anta at nøyaktig en av disse har gjort forbrytelsen. Av de 5000 er det to tidligere kriminelle som har gjort tilsvarende forbrytelse før og som nå er på frifot. La α være sannsynligheten for at en av de to tidligere kriminelle har gjort forbrytelsen og la $\beta = \dfrac{\alpha}{c}$ være sannsynligheten for at en av de resterende har gjort forbrytelsen.

a) Forklar hvorfor $2\alpha + 4998\dfrac{\alpha}{c} = 1$ og finn α når c= 10.

Det er gjort DNA funn der handlingen er utført, men disse er ikke betre enn at hver uskyldig person, uavhengig av om andre er skyldige eller ikke, kan knyttes til DNA-funnet med en sannsynlighet 10^{-5}. Vi skal anta at en skyldig person kan knyttes til DNA-funnet med sannsynlighet 1. De to tidligere kriminelle ble først undersøkt opp mot DNA-funnet. La oss kalle de to tidligere kriminelle A og B og la A_S være hendelsen at A er skyldig og la B_S være hendelsen at B er skyldig. La videre K_A være hendelsen at A blir knyttet til DNA-funnet og la K_B være hendelsen at B blir knyttet til DNA-funnet. Komplement hendelsene er gitt ved A_S^C, K_A^C, B_S^C og K_B^C.

b) Et mulig utfallsrom som involverer de to tidligere kriminelle er da gitt ved:

$$S = \left\{ \begin{matrix} \left(A_S \cap K_B^C\right),\ \left(A_S \cap K_B\right),\ \left(B_S \cap K_A^C\right),\ \left(B_S \cap K_A\right),\ \left(A_S^C \cap B_S^C \cap K_A \cap K_B\right), \\ \left(A_S^C \cap B_S^C \cap K_A \cap K_B^C\right),\ \left(A_S^C \cap B_S^C \cap K_A^C \cap K_B\right),\ \left(A_S^C \cap B_S^C \cap K_A^C \cap K_B^C\right) \end{matrix} \right\}$$

Forklar hvorfor sannsynligheten for $\left(A_S^C \cap B_S^C\right)$ er $1-2\alpha$. Finn så sannsynligheten til hver av de 4 hendelsene: $\left(A_S \cap K_B^C\right)$, $\left(A_S \cap K_B\right)$, $\left(A_S^C \cap B_S^C \cap K_A \cap K_B\right)$ og $\left(A_S^C \cap B_S^C \cap K_A \cap K_B^C\right)$.

Av de to tidligere kriminelle viste det seg at kun A kunne knyttes til DNA funnet. La K være hendelsen at kun A av de to kan knyttes til DNA-funnet.

c) Finn sannsynligheten for at A er skyldig gitt at kun A av de to tidlegere kriminelle kan knyttes til DNA-funnet, $P\left(A_S \mid K\right)$, uttrykt ved α. Hva blir sannsynligheten dersom c=10?

Oppgave 2

I et vann kan en fiske kun to typer fisk, ørret og abbor. Tallet på ørret, X, en person får i en time er poissonfordelt med parameter $\lambda = 2$, mens tallet på abbor, Y, er poissonfordelt med parameter $\lambda = 1$. I et tidsintervall av lengde t målt i timer har vi altså

$P(X=k)=\frac{(2t)^k e^{-2t}}{k!}, k=0,1,2,\ldots$ og $P(Y=k)=\frac{(t)^k e^{-t}}{k!}, k=0,1,2,\ldots$ Vi skal anta at variablene X og Y er uavhengige.

a) Hva er sannsynligheten for at en person får 3 ørret på en time? Hva er sannsynligheten for at personen får tre fisker på en time?

La T_1 være tiden til en får første ørreten.

b) Vis at T_1 er eksponentielt fordelt, finn sannsynlighetstettheten til T_1 og finn og forventingen til T_1

c) Finn sannsynligheten for at det går mer enn en time til en får første fisken. Finn og sannsynligheten for at den første fisken en får er en abbor.

Oppgave 3

En bedrift skal utporsjonere en bestemt type pulver i porsjoner på ca. 500 gram og har skaffet seg en porsjoneringsmaskin til dette formålet. Når maskinen er innstilt på μ gram kan en anta at de utporsjonerte pulvermengdene i gram, $X_1, X_2, \ldots$ er uavhengige og normalfordelte med forventning μ gram og standardavvik $\sigma = 12$ gram. En porsjon som veier mindre enn 490 gram sies å være undervektig og kunder som kjøper en slik har rett til å levere den tilbake.

a) Porsjoneringsmaskinen er innstilt slik at μ er 511 gram. Finn sannsynligheten for at en porsjon er undervektig.
Porsjonene blir fylt i esker og disse blir tilfeldig plasserte i kartonger, 12 stykker i hver kartong. La U være tallet på undervektige porsjoner i en tilfeldig valgt kartong.
Hvilken fordeling har U? Grunngi svaret. Hva er sannsynligheten for at en kartong skal inneholde minst en undervektig porsjon?

Vi skal anta at vekten av en tilfeldig valgt tom eske er normalfordelt med forventning 40 gram og standardavvik 5 gram.

b) Finn sannsynligheten for at vekten av en eske med pulver skal veie mer enn 535 gram med samme innstilling på porsjoneringsmaskinen som i 3a). Hva blir sannsynligheten for at vektforskjellen mellom to vilkårlige esker med pulver skal være større enn 15 gram?

En kunde har kjøpt en kartong med 12 esker og ønsker på grunnlag av disse å estimere μ. Kunden vurderer følgende to framgangsmåter.

1. Bestem pulverkvantumet $X_1, X_2, \ldots, X_{12}$ i hver av de 12 eskene og gjør bruk av estimatoren:

$$\hat{\mu} = \bar{X} = \frac{1}{12}\sum_{i=1}^{12} X_i$$

2. Bestem vektene $Z_1, Z_2, \ldots, Z_{12}$ av de 12 eskene med pulver i og bruk estimatoren

$$\mu^* = \bar{Z} - 40 = \frac{1}{12}\sum_{i=1}^{12} Z_i - 40.$$

c) Finn forventning og varians til $\hat{\mu}$ og μ^*. Hvilken av estimatorene vil du foretrekke?

Bedriften vil kontrollere om porsjoneringsmaskinen er rett justert. Med det skal en forstå at dersom maskinen er innstilt på μ gram, og en antar at de utporsjonerte kvanta er uavhengige og normalfordelte med forventing $\beta\mu$ og standardavvik $\sigma = 12$, så skal β være 1.
De gjør følgende forsøk. Maskinen blir innstilt på i alt n verdier, $m_1, m_2, \ldots, m_n$, og for hver innstilling veier en det utporsjonerte kvantumet. La disse vektene være $V_1, V_2, \ldots, V_n$.

d) Vis at sannsynlighetsmaksimeringsestimatoren for β da blir:

$$\hat{\beta} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i V_i \text{ der } M = \sum_{i=1}^{n} m_i^2 .$$

Finn og forventing og varians til denne.