Oppgave 1

En far har 3 sønner. En dag drar han på en reise, men før han drar ber han sønnene sine om å slå plenen. Siden han ikke spesifikt bad en av dem om å utføre oppdraget, blei sønnene enige om at hver av de skulle slå mynt og krone nøyaktig en gang. Om en fikk forskjellig resultat fra de to andre (for eksempel om en fikk krone og de to andre fikk mynt) måtte vedkommende slå plenen. Om ikke skulle de gjøre forsøket på nytt neste dag med samme regler og slik holde frem til plenen blei slått. La sannsynet for å få krone i alle kast være p.

a) La X være tallet på krone en vilkårlig dag. Hvilken fordeling er det rimelig å anta at X har? Grunngi svaret. Anta at $p=\frac{1}{2}$ og vis at sannsynligheten for at plenen blir slått den 1. dagen er 0.75.

b) Anta fremdeles at $p=\frac{1}{2}$. La N være antall dager til plenen blir slått (inklusivt den første). Hvilken fordeling har N? Grunngi svaret. Finn den kumulative fordelingsfunksjonen til N. Faren kom hjem etter at det hadde gått 3 dager. Hva er sannsynligheten for at plenen var slått?

Oppgave 2

En familie har leid seg en hytte i sommerferien. Hytta ligger ved et vann og en av personene i familien har bestemt seg for å fiske fisk til middag til seg og familien. Anta at tallet på fisker som han får i en time er poissonfordelt med parameter $\lambda = 2$. La X være antall fisker som han får i et tidsintervall av lengde t. Vi har altså: $P\left(X=k\right)=\frac{\left(\lambda t\right)^{k} e^{-\lambda t}}{k!}, k=0,1,2,\ldots$

a) Det trengs fire fisker til en middag. Finn $P\left(X=4\right)$ når t =2. Finn og ut hvor lang tid han må fiske før han kan forvente å ha fått 4 fisker.

En dag stiller han seg opp for å fiske klokka 10:00 presis. La A være hendelsen at han får 2 fisker før klokka 10:30 og la B være hendelsen at han får 2 fisker i tidsrommet 10.30 til 12:00.

b) Finn $P\left(A \cap B\right)$. En annen dag fikk han 4 fisker på nøyaktig 2 timer. Hva er sannsynligheten for at han hadde fått nøyaktig 2 fisker etter at det var gått en halv time?

Familien har leid hytta for 21 dager. Personen vurderer å fiske fisk til middag hver dag. La T_i være tiden til han har fått 4 fisker på dag i, $i = 1,2,\ldots,21$.

c) Hvilken fordeling har T_i? Grunngi svaret. Hvorfor er variansen til T_i lik 1? Finn så sannsynligheten for at personen må fiske mer enn 50 timer dersom familien skal ha fisk til middag hver dag de er på hytta. (Hint: bruk tilnærming til normalfordelingen).

Oppgave 3

Værfenomenet El niño har satt sitt preg på været det siste året og jorden har mellom annet vært svært varm. Men hvordan har været vært i Trondheim? Frå Voll målestasjon i Trondheim har vi tilgjengelig data over totalnedbør i mm for hver måned fra og med mai 2015 og til og med april 2016, i alt 12 måneder. Dataene gitt nedenfor er logaritmetransformerte (naturlig logaritme) for bedre å kunne tilpasses en normalfordeling.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}
4.05	4.48	4.28	4.58	4.11	4.09	4.15	4.52	3.76	4.51	4.03	4.09

Gå ut i fra at disse er observerte verdier for variablene X_i, $i = 1,2,\ldots,12$ der alle X_i er uavhengige og normalfordelte med forventing μ og standardavviket $\sigma = 0.25$.

a) Anta i dette punktet at $\mu = 4.2$ som er forventningen et normal år. La X være logaritmetransformert total nedbørsmengde for en vilkårlig av disse månedene. Finn $P(X \le 3.79)$. En av verdiene avviker mer enn 0.41 fra forventningsverdien. Finn sannsynligheten for at minst 1 av verdiene skal avvike mer enn 0.41 frå forventningsverdien.

b) Anta nå at μ er ukjent. Gjennomsnittet av de 12 verdiene er 4.22. Konstruer et 95% konfidensintervall for μ. Vil du ut i fra konfidensintervallet og svaret i punkt a) vurdere de siste 12 månedene til å være særlig spesielle når det gjelder nedbør?

Fra Voll målestasjon har vi og tilgjengelig data over temperatur. Dataene nedenfor representerer månedlige avvik fra normaltemperatur for tidsrommet mai 2015 – april 2016.

y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	y_{10}	y_{11}	y_{12}
-1.4	-2.4	-0.2	3.9	2.5	1.8	3.2	4.3	-1.1	2.0	2.3	0.8

Anta at disse er observerte verdier for variablene Y_i, $i = 1,2,\ldots,12$. Videre skal vi anta at $Y_i \sim N\left(\mu,\ (2.2)^2\right)$, $i = 1,2,\ldots,12$ og uavhengige.

c) Du skal nå undersøke om disse 12 månedene har vært varmere enn normalt. Formuler dette som en hypotesetest og utfør testen. Hva blir konklusjonen når signifikansnivået er 0.05?

d) Hva er P-verdien for testen i c)? Finn og sannsynligheten for type II feil når $\mu = 1$.

Vi skal nå se litt mer på nedbørsmengden gitt i innledningen av oppgave. La N være den totale nedbørsmengden for en vilkårlig av disse månedene. Variabelen X i oppgave 3a) er da gitt ved $X = \ln(N)$.

e) Finn forventning og varians til N uttrykt ved μ og σ^2. (Hint: den momentgenererende funksjonen til variabelen X er gitt ved $M_X(t) = e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$).
Anta at $\mu = 4.2$ og $\sigma = 0.25$ og finn forventningen til N.