Oppgave 1

a) La A og B være to hendelser. $P(A)=0.3$, $P(B)=0.4$ og $P(A\cap B)=0.12$.

Finn sannsynlighetene: $P(A\cup B)$ og $P(A|B)$. Er A og B uavhengige? Er de disjunkte?

Kystvakten mottar et SOS fra et skip som har gått på grunn utenfor en liten øy, men før kapteinen får gitt nøyaktig posisjon mister en radioforbindelsen med skipet. Imidlertid er de sikre på at skipet befinner seg i en av to regioner. De har n helikoptre å sende ut for å finne skipet. Anta at hvert helikopter som søker i regionen hvor skipet er, har sannsynligheten r for å finne skipet uavhengig av hva de andre helikoptrene gjør. La A være hendelsen at skipet er i region 1 og A^C hendelsen at skipet er i region 2. $P(A)=p$ og $P(A^C)=1-p$. La videre B være hendelsen at de finner skipet

b) Anta at det blir sendt m helikoptre til region 1 og de resterende til region 2. Forklar hvorfor $P(B|A)=1-(1-r)^m$.

Finn så $P(B)$. Forklar kort uten å gjøre utregninger hvordan du ville gå frem for å finne det optimale antall helikoptre å sende til hver region.

Oppgave 2

a) La X være normalfordelt med forventing 10 og varians 16. Hva blir følgende sannsynligheter:
$P(X\le 13)$, $P(8\le X\le 13)$ og $P(X\le 13|X\ge 8)$?

Oppgave 3

Kriteriet for at et værsystem faller inn under kategorien ekstremvær er at det kan utgjøre en fare for liv og verdier dersom det ikke blir satt i gang forebyggende tiltak. I Norge omfatter ekstremvær sterk vind, store nedbørsmengder med fare for flom, stor snøskredfare i store områder og stormflo.

La X være årlig antall ekstremvær i Norge som skyldes store nedbørsmengder, stor snøskredfare eller stormflo. Det antas at X er poissonfordelt med parameter λ_x. Det vil si

$$P(X=k)=\frac{\lambda_x^k e^{-\lambda_x}}{k!}, \text{ k=0,1,2, } \ldots$$

a) La p være sannsynligheten for at det ikke blir ekstremvær som skyldes store nedbørsmengder, stor snøskredfare eller stormflo et år. Forklar hvordan p avhenger av λ_x.
Hva blir p dersom $\lambda_x = 0.7$?

b) Det blir hevdet at 0.7 er for høy verdi for λ_x og en ønsker å undersøke dette nærmere. Tilgjengelig har en data for en 18-års periode fra 1994 til 2011. La T være antall år av disse som ikke har ekstremvær av denne typen. Hvilken fordeling har T? Grunngi svaret. Forklar hvorfor hypotesetestingsproblemet:

$$H_0\colon \lambda_x = 0.7 \text{ mot } H_1\colon \lambda_x < 0.7 \qquad (1)$$

kan formuleres som

$$H_0\colon p = p_0 \text{ mot } H_1\colon p > p_0 \qquad (2)$$

der $p_0 = P(X=0)$ dersom $\lambda_x = 0.7$ og p er definert i 3a).

c) Du kan nå anta at $p_0 = 0.5$. Utfør hypotesetesten (2) basert på testobservatoren T. Hva blir konklusjonen når 14 av de 18 årene ikke har ekstremvær av denne typen? Bruk signifikansnivå 0.05.

d) Den vanligste typen ekstremvær i Norge er sterk vind. Vi har også tilgjengelige data for denne typen ekstremvær for den samme 18-års perioden. La Y_i være antall ekstremvær av denne typen i år i, $i=1,2,\ldots,18$. Vi skal anta at

$$P(Y_i = k) = \frac{\lambda_y^k e^{-\lambda_y}}{k!},\ i=1,2,\ \ldots,18,\ k = 0,1,2,\ \ldots.$$

Utled sannsynlighetsmaksimeringsestimatoren for λ_y basert på $Y_1,\ldots,Y_{18}$. Hva blir estimatet når observasjonene er: 1, 4, 4, 6, 1, 3, 3, 2, 1, 3, 1, 4, 2, 2, 5, 0, 1, 3 og summen av observasjonene er 46?

e) Anta nå at X og årlig antall ekstremvær på grunn av sterk vind, Y, er uavhengige. Hvilken fordeling har $Z = X + Y$? Grunngi svaret. Anta videre at $\lambda_y = 5\lambda_x$. Finn den betingede sannsynligheten $P(X = x | Z = z)$. Hvilken fordeling har variabelen $X | Z = z$?

Oppgave 4

Sannsynligheten p definert i oppgave 3a) kan estimeres på to måter. En estimator er $\hat{p} = \frac{T}{18}$ der T er definert i oppgave 3b). En annen estimator e r $p^* = e^{-\hat{\lambda}_x}$ der $\hat{\lambda}_x = \sum_{i=1}^{18} \frac{X_i}{18}$. X_i er her antall ekstremvær som skyldes store nedbørsmengder, stor snøskredfare eller stormflo i år i, $i = 1, 2, \ldots, 18$ og har en poissonfordeling som gitt i oppgave 3. Vi vil undersøke disse estimatorene nærmere.

a) Finn forventning og varians til $\hat{p}$. Finn forventningen til $S = \sum_{i=1}^{18} X_i$.

b) Forklar hvorfor momentgenererende funksjon til S, $M_S(t) = e^{18\lambda_x\left(e^t - 1\right)}$ og hvorfor $M_{-\hat{\lambda}_x}(t) = M_S\left(-\frac{t}{18}\right)$. Vis at $E\left(p^*\right) = e^{18\lambda_x\left(e^{\frac{-1}{18}} - 1\right)}$. Er p^* forventningsrett?