Oppgave 1

Ei dame blir utsatt for et ran av en ung, blond kvinne med hestehale. Den kvinnelige tyven stakk av til fots, men ble observert i det hun satte seg inn i en gul bil kjørt av en farget mann med skjegg og bart. En stund etterpå fant politiet en ung, blond kvinne med hestehale som var sammen med en farget mann med skjegg og bart og som kjørte en gul bil. Kvinna ble derfor arrestert. Utover det var det ingen pålitelige vitner som kunne identifisere denne kvinna med ranskvinna.

a) Hva vil det si at to hendelser B og C er uavhengige?

La nå:

A_1 være hendelsen at en ung kvinne har blondt hår,
A_2 være hendelsen at en kvinne har hestehale,
A_3 være hendelsen at en bil er gul,
A_4 være hendelsen at en mann har bart,
A_5 være hendelsen at en mann er farget og har skjegg og
A_6 være hendelsen at en hvit kvinne er sammen med en farget mann i en bil.

Anta at $A_1,\ldots,A_6$ er uavhengige og at sannsynlighetene for disse hendelsene er gitt ved: $P(A_1)=\frac{1}{3}$, $P(A_2)=\frac{1}{10}$, $P(A_3)=\frac{1}{10}$, $P(A_4)=\frac{1}{4}$, $P(A_5)=\frac{1}{10}$ og $P(A_6)=\frac{1}{1000}$.

La hendelsen A være gitt ved: $A = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_6$. Finn P(A).

På bakgrunn av sannsynligheten for hendelsen A ble kvinna dømt. Høyesterett derimot var ikke overbevist om at ikke et annet par kunne passe til beskrivelsen gitt ved A. Anta nå at N par kan ha vært i området hvor ranet ble begått og at hvert av disse har en sannsynlighet p=P(A) uavhengig av hverandre for å passe til beskrivelsen.

b) La X være antall par som passer til beskrivelsen gitt ved A. Forklar hvorfor $P(X=k)=\binom{N}{k}p^k(1-p)^{N-k}$, $k=0,1,\ldots,N$. Finn $P(X=1)$ og $P(X\geq 1)$.

c) Vis at $P(X>1 \mid X\geq 1)=\dfrac{1-(1-p)^N-Np(1-p)^{N-1}}{1-(1-p)^N}$.

Ranet skjedde i Los Angeles der N kan antas å være svært stor. Vis at en tilnærmet verdi for $P(X>1 \mid X\geq 1)$ når N=6000000 er gitt ved $\dfrac{1-\frac{3}{2}e^{-\frac{1}{2}}}{1-e^{-\frac{1}{2}}}$ og finn denne.

Oppgave 2

a) La X være normalfordelt med forventning $\mu = 0.0165$ og standardavvik $\sigma = 0.073$.
Finn $\mathrm{P}(\mathrm{X} > 0)$ og $\mathrm{P}(|\mathrm{X}| < 0.1)$.

La $S(i)$ være pris på en vare etter at det har gått *i* uker fra en viss dato. En populær modell er at alle $\mathrm{Y}_i = \dfrac{S(i)}{S(i-1)}$, $i \geq 1$ er uavhengige og at $ln(\mathrm{Y}_i)$, $\mathrm{i} \geq 1$ er normalfordelte. Anta at alle $ln(\mathrm{Y}_i)$, $i \geq 1$ har samme fordeling som variabelen X i oppgave 2a).

b) Finn sannsynligheten for at det er prisøkning første uken, det vil si finn $P(\mathrm{Y}_1 > 1)$.
Finn også sannsynligheten for at det har skjedd en prisøkning i løpet av de to første ukene, eller at $P\left(\dfrac{S(2)}{S(0)} > 1\right)$. (Hint: bruk at $\dfrac{S(2)}{S(0)} = \dfrac{S(2)}{S(1)} \cdot \dfrac{S(1)}{S(0)}$).

c) Finn forventning og varians til variablene $\mathrm{Y}_i, i \geq 1$. (Hint: bruk at den momentgenererende funksjonen til variabelen X er gitt ved $M_x(t) = e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$).

Oppgave 3

På grunn av global oppvarming har det vært spekulert i om vi har fått mindre stabilt vær. La en tørr dag kjennetegnes ved at det ikke er nedbør og en våt dag kjennetegnes ved at det er noe nedbør av et visst slag. Anta at været vi får hver dag, karakterisert ved om dagen er våt eller tørr, kan betraktes som en uendelig forsøksrekke av uavhengige forsøk der sannsynligheten for at en tørr dag etterfølges av en våt er konstant lik p. La T være lengden av en tørr periode i dager.

a) Forklar hvorfor $P(\mathrm{T} = \mathrm{k}) = (1-\mathrm{p})^{\mathrm{k}-1}\mathrm{p}$, $\mathrm{k} = 1, 2, \ldots$
Hvilken fordeling er dette? Finn $P(\mathrm{T} \leq \mathrm{k})$.

b) Den momentgenererende funksjonen til T er gitt ved $\mathrm{M_T}(\mathrm{t}) = \dfrac{\mathrm{pe^t}}{1-(1-\mathrm{p})\mathrm{e^t}}$.
Bruk denne til å finne forventningen og variansen til T.

Anta nå at vi har n observasjoner $k_1, k_2, \ldots k_n$ av lengden av n uavhengige tørre perioder $\mathrm{T_1}, \mathrm{T_2}, \ldots \mathrm{T_n}$.

c) Utled sansynlighetsmaksimeringsestimatet for p uttrykt ved $k_1, k_2, \ldots k_n$ og n.
Hva blir sannsynlighetsmaksimeringsestimatoren?

Det blir hevdet at normal verdi for p =0.3. Det skal nå utføres en hypotesetest for å undersøke om p har økt basert på observasjonene i 3c). Du får opplyst at n=100 og at $\sum_{i=1}^{n} k_i = 290$ Bruk $\overline{\mathrm{T}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{T}_i$ som testobservator (teststatistikk).

d) Forklar hvorfor stor p gjør at $\overline{\mathrm{T}}$ forventes å være liten. Formuler nullhypotese og alternativ og utfør testen. Hva blir konklusjonen når signifikansnivået er 0.05? (Hint: bruk tilnærming til normalfordelingen).