2/7-97

Juni 97

I.

a) $Y_i = 1$ dersom fødsel # i resulterer i jente, og $P(Y_i = 1) = p$. Hver fødsel antas uavhengig.

b.) $p^y \cdot (1-p)^{n-y}$ er sannsynligheten for at fødsel # $1, \dots, y$ resulterer i jente og fødsel # $1+y, \dots, n$ resulterer i gutt.

Det finnes $n!$ permutasjoner av disse fødslene. Permutasjonene innenfor de y jentefødslene endrer ikke utfallet, og tilsv. for de $n-y$ guttefødslene.

): $n! / (y! \, (n-y)!)$ er antall mulige fødsler med y jenter.

$$P(Y=y) = \sum_{\substack{\#\text{ fødselsekv.} \\ \text{med } y \text{ jentef.}}} p^y \cdot (1-p)^{n-y} = \binom{n}{y} \cdot p^y \cdot (1-p)^{n-y}$$

c.)
$$\left.\begin{aligned} EY &= \sum EY_i = n \cdot p \\ \operatorname{Var} Y &\underset{\text{Uavh.}}{=} n \cdot \operatorname{Var} Y_i = n \cdot [E Y_i^2 - (EY_i)^2] \\ &= n \cdot [p - p^2] = n \cdot p \cdot (1-p) \end{aligned}\right\} \text{Unødvend}$$

Y_i'ene er uavh. med identisk fordeling med $EY_i = p$ og $\operatorname{Var} Y_i = p \cdot (1-p)$.

$$\lim_{n \to \infty} P\left(a \le \frac{Y_1 + \dots + Y_n - n \cdot p}{\sqrt{n} \cdot \sqrt{p \cdot (1-p)}} \le b\right) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} \, dx$$

M. a. o. er $Z = \dfrac{Y - n \cdot p}{\sqrt{n} \cdot \sqrt{p \cdot (1-p)}}$ tilnærmet

$\sim N(0, 1)$.

Da er $Y = \sqrt{n} \cdot \sqrt{p \cdot (1-p)} \cdot Z + np$
tilnærmet normalfordelt med $E[Y] = np$
og $\operatorname{Var} Y = n \cdot p \cdot (1-p)$.

d.) $P\left(\dfrac{Y - n \cdot \frac{1}{2}}{\sqrt{n \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}} \leq -u_{1\%} \right) = 1\%$

Tabell gir $u_{1\%} = 2{,}326$.

Dataene $\dfrac{27708 - \frac{1}{2} \cdot (27708 + 29154)}{\sqrt{\frac{1}{4} \cdot (27708 + 29154)}} = -6{,}064$

H_0 forkastes

e.) $\dfrac{y - np}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}} \leq -u_{1\%}$ $\quad (p = \frac{1}{2})$

$y \leq np - u_{1\%} \cdot \sqrt{n \cdot p(1-p)} \approx 28153{,}7$

$y \leq 28153 = y_c$ er kritisk område

$(n/2 = 28431)$

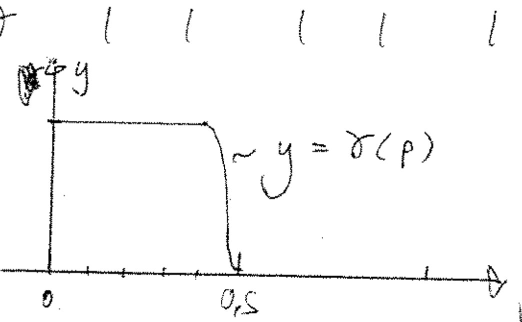
f.) Type I feil: H_0 er riktig, men forkastes.

Type II feil: H_1 er riktig, men H_0 forkastes ikke.

$P(\text{Type I feil}) = \alpha = 1\%$

g.) Sanns. for type II feil er $P(Y > y_c)$, d.v.s. sanns. for at $\frac{Y - np}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}} > \frac{y_c - np}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}} = y_p$

p	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,45	0,48	0,49
y_p	∞	314	236	102	46	−2,33	21,6	7,21	2,44
β	0	0	0	0	0	99%	0	0	0,007
γ	1	1	1	1	1	1%			0,993



0,495

0,05

0,48

0,52

II.

a) Antall poteter som resulterer fra en avling er binomialfordelt ved at dette er summen av Bernoulli-var. tilsv. hver mulig potet. Antallet er stort, så en asymptotisk normalfordeling følger. En faktor gir omregning til kg/dekar, så avlingen i kg/dekar er (tilnærmet) normalfordelt.

b)

$$\hat{\mu} \approx 2484 \text{ kg/dekar}$$

147,69

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{3} \cdot [(2424-2484)^2 + \cdots]} \approx 170,5 \text{ kg/}$$

29 082

c)

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum (X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{n-1} \cdot [\sum (X_i^2 - \bar{X}$$

$$E X_i^2 = \sigma^2 + \mu^2, \quad E \bar{X}^2 = \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2$$

$$E S^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum (\sigma^2 - \frac{1}{n} \sigma^2) = \sigma^2 \cdot \frac{1}{n-1} \cdot n \cdot \frac{n-1}{n}$$

$$): \quad E S^2 = \sigma^2$$

4/a

d.) Det holder å vise at

$$T_{n-1} = \frac{U}{\sqrt{Z}} \cdot \sqrt{n-1} \quad \text{hvor } U \sim N(0,1), \quad Z \sim \chi^2_{n-1}$$

U, Z uavh.

$$Var(\bar{X} - \mu) = \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot \sigma = \frac{\sigma}{n}$$

$$(\bar{X} - \mu) / \sqrt{\frac{\sigma}{n}} \sim N(0,1)$$

$$(n-1) \cdot S^2 / \sigma^2 \sim \chi^2_{n-1}$$

} gir påstanden

e.&f.

$$\bar{X} \pm t_{\alpha/2, n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \qquad [2283{,}6 \, , \, 2684{,}4]$$

$t_{5\%, 3} = 2{,}35$ $\quad P(T_{n-1} > t_{\alpha/2, n-1}) = \alpha/2$ etc. for utledn.

Det er 90% sannsynlig at

$$\mu \in [\bar{X} - t_{\alpha/2, n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \, , \, \bar{X} + t_{\alpha/2, n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}]$$

g) $\sigma = 170{,}5$, $\bar{X} \pm u_{5\%} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ $\quad [2343{,}7 \, , \, 2624{,}3]$

$u_{5\%} = 1{,}645$

h) Det siste intervallet er mindre fordi det er mindre usikkerhet p.g.a. tilleggsoppl. i g.. t-fordelingen er flatere enn normalf.

III.

a.) $f(s) = \begin{cases} 1 & 0 \leq s \leq 1 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$ ← unødv. denne

$f : S \to \mathbb{R}$!

$$P[a,b] = \int_a^b f(s)\,ds$$

b.) $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \Leftrightarrow$ uavh.

$P(A \cap B) = P[0, 1/4] = 1/4$

$P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1/4$

): A og B er uavh.

g) $X : [0,1] \to \mathbb{R}$

(X er en reell funksjon definert på $S = [0,1]$.)

[$X^{-1}(a,b)$ må også alltid være en hendelse, men boka nevner ikke dette ...]

6/8

c.) Z_A og Z_B er uavh. Bernoulli-variabler, så $Z = Z_A + Z_B$ er binomialfordelt med $p = 1/2$ og $n = 2$.

d.) $$f_{Z_A, Z_B}(0,0) = P(Z_A = 0 \,\&\, Z_B = 0) = 1/4$$
$$= f_{Z_A, Z_B}(z_A, z_B)$$

$(z_A, z_B) \in \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$

e.) $$F_Z(z) = P(Z_A + Z_B \le z)$$

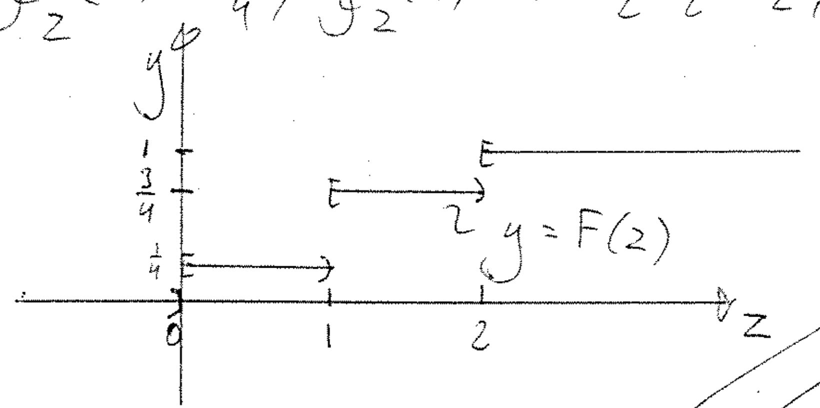
$F_Z(z) = 0 \quad z < 0$, $0 \le z < 1$: $F_Z(0) = 1/4$

$1 \le z < 2$: $F_Z(z) = F_Z(1) = 1/4 + 1/4 + 1/4 = 3/4$

$F_Z(z) = 1$

(Kontroll: $f_Z(z) = \binom{2}{z} \cdot \frac{1}{2}^{z} \cdot \frac{1}{2}^{2-z}$

$f_Z(0) = \frac{1}{4}$, $f_Z(1) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, $f_Z(2) = \frac{1}{4}$)



h.)

$$P(a \leq X \leq b)$$

$$P\{s \in [0,1] \mid a \leq X(s) \leq b\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx$$

f.)

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2}\, dt$$

$$f_X(x) = F_X'(x)$$

---

x	0	0,4	0,7	1,4
F_X	0,5	0,655	0,816	0,919

SLUTT

0	0,5	1,0	1,5	2,0
0,5	0,691	0,841	0,933	0,977